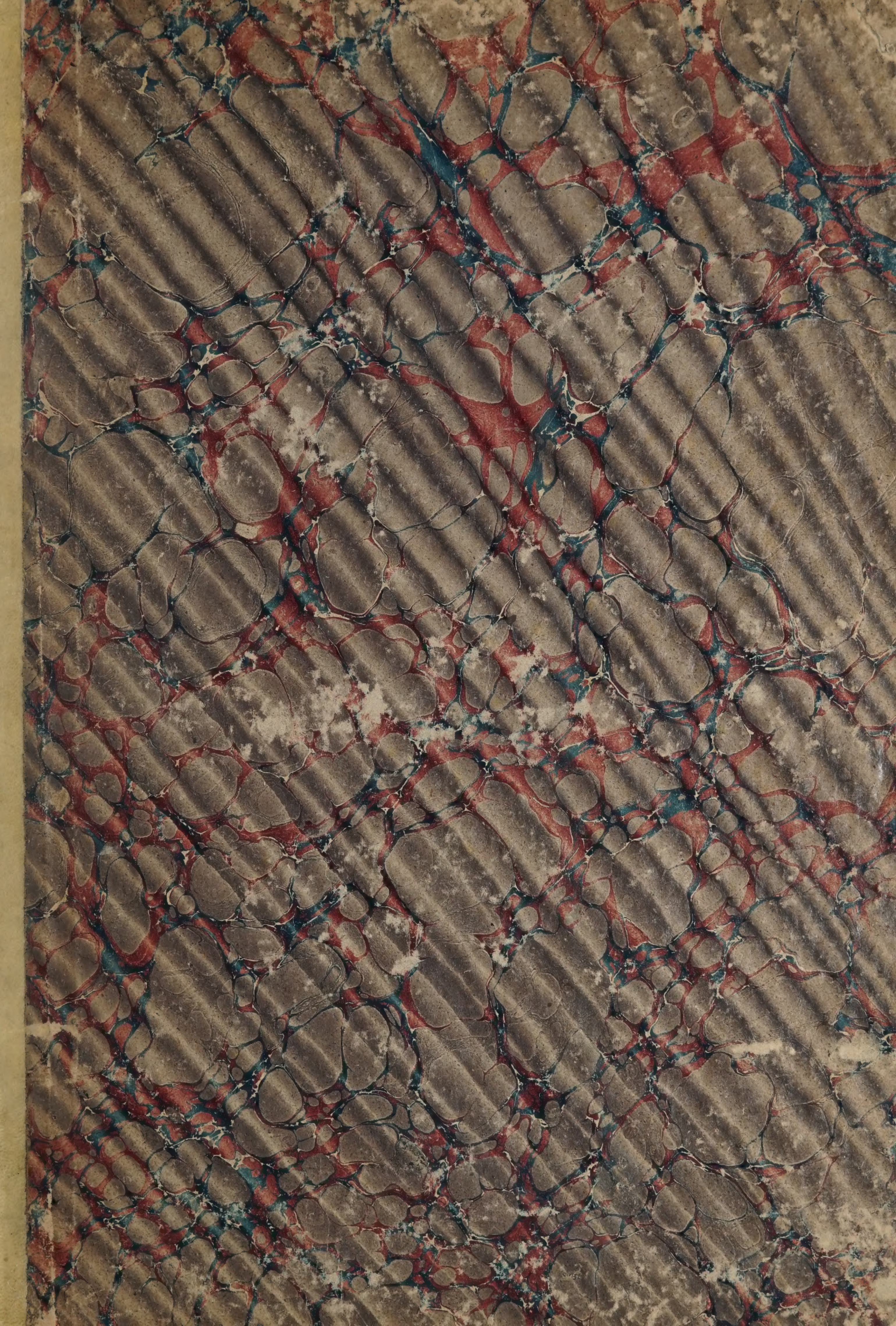


UNIVERSITY OF ILLINOIS
LIBRARY

Class 510.5 Book AMI Volume v.3

Mr10-20M

MATHEMATICS Reading Room
DEPARTMENT

Digitized by the Internet Archive
in 2021 with funding from
University of Illinois Urbana-Champaign

https://archive.org/details/annalidimatemati3186unse

ANNALI
DI
MATEMATICA
PURA ED APPLICATA

TIPOGRAFIA DELLA S. C. DE PROPAGANDA FIDE.

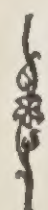
ANNALI
DI MATEMATICA
PURA ED APPLICATA

PUBBLICATI DA

BARNABA TORTOLINI
Professore di Calcolo Sublime all' Università di Roma

E Compilati da

E. BETTI *a Pisa*
F. BRIOSCHI *a Pavia*



A. GENOCCHI *a Torino*
B. TORTOLINI *a Roma*

(In continuazione agli Annali di Scienze Matematiche e Fisiche)

TOMO III. ANNO 1860.

ROMA
PRESSO FRANCESCO BLEGGI LIBRAJO
(Via del Piè di Marmo N°. 38.)

1860.

510.5
AMI
v.3

ANNALI
DI MATEMATICA
PURA ED APPLICATA

MEMORIA
INTORNO AD ALCUNE QUESTIONI MATEMATICHE

DELL' INGEGNERE
ALESSANDRO DORNA
Professore di Meccanica Razionale nella Rª. Aª. Mᵉ. di Torino.

PREFAZIONE

Come nella Geometria, nella quale, enunciati pochi assiomi, si deducono da questi razionalmente alcune verità fondamentali, che sono sufficienti per dimostrare tutte le proprietà e risolvere tutti i problemi relativi all'estensione; parimenti nella Meccanica, ammesse poche verità assiomatiche, se ne derivano, pure razionalmente, alcuni principii, coi quali si dimostrano tutte le proprietà, e si risolvono tutte le questioni risguardanti l'equilibrio ed il moto. In questa, come nell'altra scienza, si trattano le questioni coll'analisi matematica, poichè dopo la feconda applicazione, che Des Cartes fece dell'analisi alla geometria, e la memorabile scoperta, che Bonaventura Cavalieri iniziò, e Leibnitz e Newton elevarono a scienza, ogni questione di Meccanica si può assoggettare al calcolo; e se questa scienza delle scienze non presenta ancora mezzi sufficienti, la questione presa a trattare viene considerata come insolubile.

Il pregio principale delle soluzioni matematiche consiste in ciò che ogni esatta deduzione delle formole, che tali soluzioni somministrano, è una legittima conseguenza delle ipotesi stabilite a priori, e può dare luogo a scoperte che invano, o difficilmente si farebbero per altra via.

L'interpretazione dei fenomeni naturali è una sorgente inesauribile di problemi per la Meccanica che si risolvono prendendo le mosse da certe leggi primitive della natura, ricavate dall'esperienza, sulla quale deve fondarsi quell'interpretazione. Tali leggi

165953

sono casi particolari di altre leggi più complicate, che nella meccanica si possono assumere come ipotesi, e sottoporre al dominio dell'analisi; onde appare potersi talvolta spiegare razionalmente, ed anche prevedere, i fenomeni naturali.

Se i risultati, che analiticamente si deducono, non vengono confermati dall'esperienza è segno che le ipotesi stabilite da principio differiscono in qualche cosa dalle leggi naturali; epperciò bisogna cambiare o modificare quelle ipotesi, se si vogliono ottenere dei risultati che sieno conformi ai risultati sperimentali. Ma ciò risguarda unicamente la Fisica, poichè per quanto spetta alla meccanica nulla sarà da mutare, dovendo di necessità le premesse, e le conseguenze accordarsi pienamente in tutto.

L'intelletto, il quale ama spaziare nelle regioni del vero assoluto, può trovare materia d'interessanti elucubrazioni anche quando siffatte speculazioni non sono immediatamente utili nel senso pratico. Aggiungasi che può eziandio trarre profitto delle conseguenze, per la risoluzione di altre quistioni speculative o naturali.

Sebbene fra tutti i sistemi, che è possibile immaginare, quelli della Natura debbano presentare il maggior interesse, tuttavia se ne possono concepire infiniti altri ugualmente degni di considerazione per le molte ed interessanti loro proprietà, alcune delle quali possono anche essere uguali od analoghe alle leggi naturali. Uno studio profondo di questi sistemi ideali risveglia potentemente l'intelletto, e lo rende maggiormente atto ad interrogar la natura con tutto quell'acume che i profondi suoi secreti richieggono. Si ha una prova luminosa di ciò in Newton, il quale inventò forse più d'ogni altro e più di tutti scoperse.

Pertanto avendo a pronunciare un giudizio sopra un sistema od una teoria, bisogna ponderare accuratamente le ipotesi e le conseguenze per assicurarsi che queste derivino legittimamente da quelle, e considerare separatamente e confrontare fra loro le proprietà cui danno origine. Se queste proprietà sono interessanti, e lasciano sperare delle applicazioni successive, quel sistema e quella teoria non si devono abbandonare; principalmente quando le ipotesi sono poco dissimili da certe leggi sperimentali, perchè in tali casi è sempre lecito sperare dei risultati i quali siano di qualche pratica utilità. Certamente, se le leggi semplici della Natura fossero perfettamente conosciute, e tradotte in analisi, non menassero mai a difficoltà insormontabili nella ricerca delle quantità necessarie a sapersi per la spiegazione dei fenomeni, qualunque altra questione di meccanica diventerebbe superflua od assai meno importante. Ma nè quelle leggi si conoscono perfettamente, nè sempre si possono condurre a lieto fine i calcoli da cui dipendono quelle quantità. Cosicchè convien dire che l'uomo abbia solamente la facoltà di accostarsi alle leggi complesse della Natura, senza mai poterle esattamente determinare a motivo della loro coesistenza.

Sebbene le riflessioni fatte superiormente possano sembrare giustissime, bisogna pur confessare che non sempre sono apprezzate. Per esempio, ultimamente in una

scuola si è creduto dover obbiettare e compiutamente rigettare una odierna teoria sulla determinazione delle pressioni o tensioni nei sistemi elastici, propugnata dai signori Mossotti, Menabrea, ed altri, mettendo in campo delle considerazioni indirette e dei casi particolari concepiti, e non sperimentati, nei quali si pretende che la teoria non possa andare d'accordo con l'esperienza. Probabilmente quelle considerazioni, alle quali non si può rispondere, perchè non sono pubblicate, saranno gratuite, e vaghe, e non realizzabili quei casi particolari. Mentre per confutare una teoria occorre, volendo procedere razionalmente, dimostrarla erronea, appoggiati a qualche principio incontestabile; e, fisicamente, fare qualche esperimento, il quale sia nelle condizioni supposte dalla teoria e somministri dei risultati essenzialmente differenti da quelli che da essa derivano. Del resto, anche ammesso che quest'ultima cosa possa succedere, non dovrebbesi tuttavia ancora rigettare quella teoria, poichè bellissimi ne sono i risultati ed utili eziandio per la risoluzione di altre questioni importanti.

Ogni qual volta si vuole, appoggiandosi a considerazioni indirette, ed a casi pratici concepiti e non sperimentati, obbiettare o restringere i risultati che le teorie matematiche somministrano, si corre un grave pericolo di errare. Ciò è già accaduto a varii, ed anche a matematici di vaglia, come si vedrà dalla discussione delle questioni prese a trattare in questa memoria.

Torino 10 Marzo 1860.

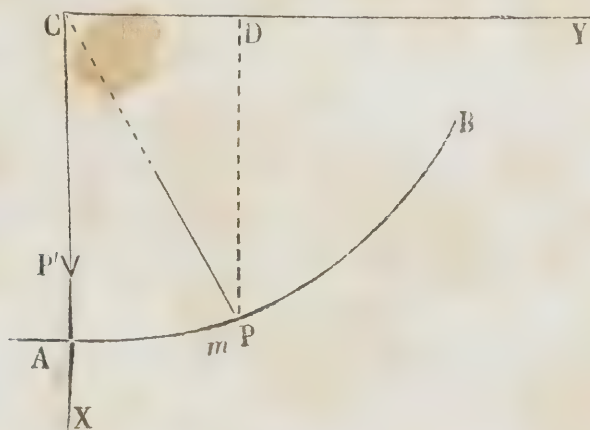
ALESSANDRO DORNA.

---

1. Nel corso complementare di analisi e di meccanica razionale professato da I. V. alla scuola normale di Francia (*Paris, Bachelier*, 1851) trovasi inserito il seguente problema :

« *Problema*

» Determinare la curva fissa AmB sulla quale un peso P è costretto a restare in
» modo che in tutte le sue posizioni questo peso faccia equilibrio ad un altro peso
» P' sospeso verticalmente ad una corda inestensibile, la quale passa sopra una pu-
» leggia C ed è attaccata al peso P (non si tiene conto del peso della corda)



» Prendendo per assi la verticale CP'X e l'orizzontale CY ; siano x ed y le coor- » dinate del punto P, r il raggio vettore CP, x' l'ascissa del punto P', l la lun- » ghezza costante della corda P'CP; si ha

$$» \; x' + r = l$$

» Il sistema essendo a legami completi, il principio delle velocità virtuali non som- » ministra che una equazione

$$» \; \mathrm{P}dx + \mathrm{P}'dx' = 0,$$

» alla quale bisogna associare quella che si ottiene differenziando l'equazione di con- » dizione precedente,

$$» \; dx' + dr = 0 \;;$$

» eliminando dx' si ha

$$» \; \mathrm{P}dx - \mathrm{P}'dr = 0$$

» ed integrando

$$» \; r = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}'} x + \text{cost.}$$

» il raggio vettore essendo *funzione razionale* dell'ascissa, la curva cercata sarà una » sezione conica, avente il punto C per fuoco, e per asse principale la verticale Cx. » *Siccome il peso* P *è in parte distrutto dalla resistenza della curva sulla quale » egli riposa, e che il peso* P' *conserva tutta la sua azione, egli è evidente che* » P *deve essere più grande di* P', la quale cosa d'altronde è indicata dall'equazione

$$» \; \mathrm{P}\,dx = \mathrm{P}'dr.$$

» Si ha dunque $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}'} > 1$ e, per conseguenza, la sezione conica non può essere che » una iperbole.

» La costante arbitraria nata dall'integrazione sarà determinata dalla condizione » che la curva debba passare per un punto dato. Supponendo che questo punto sia » l'origine C, la costante sarà nulla, il raggio sarà proporzionale all'ascissa x, il che » caratterizza una linea retta, o piuttosto un piano inclinato passante per il punto » C, e sul quale il peso P potrà strisciare. »

Noto di passaggio che le parole *funzione razionale* devono essere susseguite dalle seguenti : *intera e di primo grado*, probabilmente ommesse per errore di stampa, e passando a considerare la soluzione della questione osservo che l'equazione

$$s = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}'} x + \text{cost.}$$

è una legittima conseguenza delle ipotesi staidlite a priori, e che per ciò le tre se-

zioni coniche, elissi, iperbole, parabola e le loro varietà soddisfano alle condizioni d'equilibrio dei due pesi P e P'.

Che la considerazione indiretta espressa con le parole da me sottolineate: *siccome il peso P è in parte distrutto dalla resistenza della curva, ecc.*, non possa nullamente motivare l'esclusione dell' elissi e della parabola, risulta chiaramente da ciò che siffatta considerazione non ha legame di sorta con le ipotesi stabilite da principio. L'unica restrizione che da queste deriva si è che la lunghezza della corda essendo limitata, solamente una parte della curva rappresentata dall'equazione soddisferà alle condizioni del problema. Ma nulla obbliga a prendere soltanto un arco di iperbole, e farò vedere più innanzi che anche l'elissi e la parabola soddisfano all'equilibrio dei due pesi.

Intanto, giacchè sono portato a trattare questo problema, terrò eziandio conto dell' attrito fra il peso e la curva, considerando l'equilibrio nello stato prossimo al moto.

2. Rappresento con

P il peso gravitante sulla curva, considerato come un punto materiale; e

Q il peso che lo sostiene per mezzo della corda.

T la componente, tangente alla curva, della risultante delle forze operanti sul punto, P e Q.

N la componente normale alla stessa curva delle stesse forze.

f il coefficiente d'attrito fra il peso P e la curva.

x, y le coordinate della posizione occupata da P, allorchè si mette l'origine delle coordinate dove risiede la puleggia, e si prende per asse delle x la verticale, e per asse delle y l'orizzontale.

z la distanza fra la posizione summentovata, e l'origine delle coordinate.

φ l'angolo che questa distanza fa con l'asse delle x negative.

s un arco qualunque della curva.

$\varkappa$, γ le componenti secondo i due assi della risultante delle forze P e Q.

Ciò posto, si ha dalla meccanica che l'equazione d' equilibrio del punto sulla curva, nello stato prossimo al moto è la seguente.

$$(1) \qquad T - fN = 0$$

e che

$$T = \varkappa\frac{dx}{ds} + \gamma\frac{dx}{ds}, \quad N = \varkappa\frac{dy}{ds} - \gamma\frac{dx}{ds},$$

$$\varkappa = P - Q\frac{x}{z}, \qquad \gamma = -Q\frac{y}{z}$$

per conseguenza l'equazione differenziale della curva d'equilibrio sarà

$$(2) \qquad (Pz - Qx - fQy)dx - (fPz - fQx + Qy)dy = 0.$$

Osservando che

$$(3) \qquad x = -z\cos\varphi; \qquad y = z \operatorname{sen}\varphi$$

all'equazione trovata si può dare la forma

$$z(P\,dx - fP\,dy - Q\,dz - fQz\,d\varphi) = 0.$$

Il fattore

$$z = 0$$

ha per luogo geometrico l'origine delle coordinate: collocando dunque il peso P in questo punto supposto fisso l'equilibrio avrà luogo indipendentemente dai valori di P, Q, ed f.

Uguagliando a zero l'altro fattore si ottiene l'equazione

$$(4) \qquad P\,dx - fP\,dy - Q\,dz - fQz\,dy = 0$$

la quale si integra facilmente come segue:

Si differenziano le equazioni (3),

$$dx = z \operatorname{sen}\varphi\,d\varphi - dz\cos\varphi; \qquad dy = z\cos\varphi\,d\varphi + dz \operatorname{sen}\varphi,$$

e si elimina dy e dx dall'equazione (4). In tal modo le variabili z e φ possono esisere separate, e si trova:

$$\frac{dz}{z} + \frac{\frac{P}{Q}(-\operatorname{sen}\varphi + f\cos\varphi)\,d\varphi}{1 + \frac{P}{Q}(\cos\varphi + f\operatorname{sen}\varphi)} = -\frac{f\,d\varphi}{1 + \frac{P}{Q}(\cos\varphi + f\operatorname{sen}\varphi)}$$

ed integrando

$$(5) \qquad z = \frac{\text{Costante}}{1 + \frac{P}{Q}(\cos\varphi + f\operatorname{sen}\varphi)}\, e^{-f\int\frac{d\varphi}{1 + \frac{P}{Q}(\cos\varphi + f\operatorname{sen}\varphi)}}$$

Si hanno da considerare tre casi:

Primo Caso

$$P = \frac{Q}{\sqrt{1 + f^2}}$$

l'equazione della curva è la seguente:

$$(6) \qquad z = \frac{\text{Costante}}{1 + \frac{P}{Q}(\cos\varphi + f \operatorname{sen}\varphi)} \cdot e^{f\frac{P}{Q}\frac{f\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi}{1+\frac{P}{Q}(\cos\varphi + f\operatorname{sen}\varphi)}}$$

Secondo Caso

$$P < \frac{Q}{\sqrt{1+f^2}}$$

si trova

$$(7) \qquad z = \frac{\text{Costante}}{1 + \frac{P}{Q}(\cos\varphi + f \operatorname{sen}\varphi)} \cdot e^{\frac{fQ}{\sqrt{1-\frac{P^2}{Q^2}(1+f^2)}}}$$

essendo

$$\operatorname{tang.} Q = \frac{\sqrt{1-\frac{P^2}{Q^2}(1+f^2)}(f\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi)}{\frac{P}{Q}(1+f^2) + \cos\varphi + f\operatorname{sen}\varphi}$$

finalmente, quando

$$P > \frac{Q}{\sqrt{1+f^2}}$$

si ottiene

$$(8) \qquad z = \frac{\text{Costante}}{1 + \frac{P}{Q}(\cos\varphi + f \operatorname{sen}\varphi)} \cdot H^{\frac{f}{\sqrt{\frac{P^2}{Q^2}(1+f^2)-1}}}$$

nella quale

$$H = \frac{1 + \frac{P}{Q}(\cos\varphi + f\operatorname{sen}\varphi)}{\frac{P}{Q}(1+f^2) + \cos\varphi + f\operatorname{sen}\varphi + \sqrt{\frac{P^2}{Q^2}(1+f^2) - 1}(f\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi)}$$

3. Non volendo considerare l'attrito bisogna fare $f=0$, e l'equazione (2) della curva si riduce alla seguente

*

$$z = \frac{\text{Costante}}{1 + \frac{P}{Q} \cos \varphi} \tag{9}$$

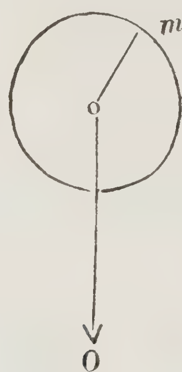
Si scorge immediatamente che la curva sarà

l'elissi	se	$P < Q$
la parabola	»	$P = Q$
l'iperbole	»	$P > Q$

e che tutte queste curve hanno un fuoco nell'origine delle coordinate, dove si è posto la puleggia, e per asse focale la verticale.

Primo esempio.

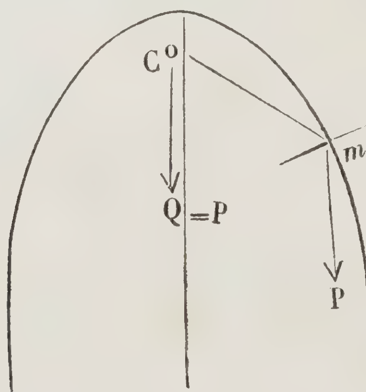
Supponongo $P = 0$; in tal caso l' equazione rappresenta un circolo il quale ha il centro nell'origine, e si vede a priori che l'equilibrio ha sempre luogo su questa varietà dell'elissi.



Infatti tutti i raggi sono normali alla circonferenza, e perciò la tensione della corda prodotta dal peso Q è in tutte le posizioni del punto m equilibrata dalla resistenza della curva.

Secondo esempio.

$P = Q$. Si vede a priori che la curva d'equilibrio è la parabola



Infatti, in qualunque punto della medesima il raggio vettore, secondo il quale opera la tensione prodotta dal peso Q nella corda, fa angoli uguali con la tangente alla curva e con la parallela all'asse focale nella quale opera il peso P; e per conseguenza, scomponendo l'uno e l'altro peso in due forze una delle quali sia tangente alla curva e l'altra normale alla medesima; le componenti normali saranno equilibrate dalla resistenza della curva e le due tangenti si faranno vicendevolmente equilibrio; di manierachè il punto sarà equilibrato sulla curva ed in uno stato prossimo al moto.

Terzo esempio.

L'equazione (9) scritta in coordinate ortogonali (3) è della forma

$$(10) \qquad \sqrt{x^2+y^2} - \frac{P}{Q}x = \text{costante}$$

dalla quale, nel caso in cui la costante è uguale a zero, si ricava

$$(11) \qquad y = \pm x\sqrt{\frac{P^2}{Q^2}-1}$$

se quindi $P > Q$ la linea d'equilibrio è una varietà dell'iperbole, cioè due rette che si tagliano. Queste rette fanno entrambe con l'asse verticale un angolo il di cui coseno è $\frac{Q}{P}$; pertanto si vede a priori che i pesi P e Q si faranno equilibrio. Ed in vero, sostituendo al peso P due componenti una delle quali sia normale, e l'altra parallela alla retta fissa che sostiene P, la prima componente è equilibrata dalla resistenza della linea, e l'altra, il cui valore è Q, a motivo del coseno summentovato, è controbilanciata dalla resistenza della corda che è pure uguale a Q.

Se $P = Q$, le due rette rappresentate dall'equazione (10) si confondono con l'asse delle x; e se $P < Q$, si riducono all'origine delle coordinate. In entrambi i casi di queste due varietà della parabola e dell'elissi l'equilibrio si riconosce a priori.

4. Allorchè il coefficiente f dell'attrito non è nullo le curve d'equilibrio (6), (7), (8) sono generalmente assai più complicate delle sezioni coniche considerate nel numero precedente. Tuttavia anche in tale ipotesi vi sono parecchi casi interessanti. Io mi limito a due soli esempi.

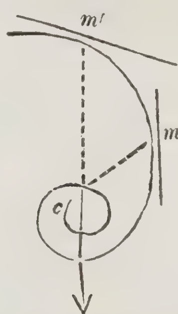
Primo esempio.

$P = 0.$

La curva d'equilibrio è una spirale logaritmica che ha per equazione

$$z = \text{costante} \,.\, e^{-f\varphi}.$$

Si vede a priori che in tal caso l'equilibrio ha sempre luogo



Infatti in ogni punto della spirale logaritmica la tangente fa angolo costante col raggio vettore, e per conseguenza scomponendo la tensione prodotta dal peso Q nella corda distesa secondo $c'm$, in due forze, una delle quali sia normale alla curva e l'altra operi secondo la tangente alla medesima, queste due forze si conserveranno costanti allorchè si farà passaggio dal punto m ad un altro punto qualunque della spirale. Se adunque l'equilibrio ha luogo in una data posizione avrà eziandio luogo in tutte le altre. Ciò posto, consideriamo il punto m' della curva che è situato sulla verticale passante per l'origine. In tale posizione la corda è verticale, ed il peso Q trovasi come fosse collocato sopra un piano inclinato faciente con la verticale l'angolo avente per cotangente il coefficiente d'attrito: il peso Q è dunque equilibrato e nello stato prossimo al moto, e per conseguenza da quanto si è detto più sopra, questo equilibrio avrà pure luogo in tutte le altre posizioni.

Secondo esempio.

$$Q = 0.$$

L'equazione della curva d'equilibrio è la seguente

$$z = \frac{\text{costante}}{\cos \varphi + f \operatorname{sen} \varphi}$$

la quale tradotta in coordinate ortogonali (3) è della forma

$$y = \frac{1}{f} x + \text{costante}$$

la linea d'equilibrio è dunque una retta che ha per cotangente il coefficiente d'attrito. Si vede a colpo d'occhio che è la sola retta che possa soddisfare alle condizioni d'equilibrio.

Quando è anche nullo il coefficiente f, l'equazione (10) si riduce alla seguente

$$x = \text{costante}$$

e rappresenta una retta orizzontale, che è l'unica retta sulla quale il peso Q possa stare in equilibrio senza resistenza d'attrito.

5. Notai nella prefazione che ogni esatta deduzione delle formole è una legittima conseguenza delle ipotesi stabilite a priori, e può dare luogo a scoperte che invano o difficilmente si farebbero per altra via posso dare in piccolo una prova di ciò.

Tutti sappiamo che la legge ottica di rifrazione consiste in ciò, che l'angolo incidente, e l'angolo rifratto sono in tale dipendenza l'uno con l'altro che il rapporto dei loro seni è una quantità costante. Or bene, la considerazione delle tre sezioni coniche come soddisfacenti esclusivamente all'equilibrio dei pesi P e Q, il primo dei quali sia attaccato ad un punto della curva parallelamente all'asse focale, e l'altro operi sullo stesso punto nella direzione del raggio vettore, mi presentò alla mente una proprietà delle tre curve in discorso affatto identica alla legge ottica di rifrazione summentovata. Non mi risulta che questa proprietà sia già stata notificata da altri; e sembrandomi che la medesima possa essere di qualche utilità nelle applicazioni la presento qui sotto forma di teorema.

Teorema.

I seni degli angoli, che la normale alle tre curve di secondo grado fa col raggio vettore e con l'asse focale, sono in un rapporto costante ed eguale al coefficiente di eccentricità.

APPLICAZIONE DEL DISCRIMINANTE NULLO ALLA RISOLUZIONE DI ALCUNI PROBLEMI.

DEL SIG. PROF. MATTIA AZZARELLI

MAGGIORE DI ARTIGLIERIA.

1. Come osservava il Sig. Professore Tortolini in una sua memoria *Sulle relazioni che passano fra le radici dell'equazioni di secondo, terzo, e quarto grado, ed alcune proprietà delle somiglianti forme omogenee a due indeterminate* (*), importanti applicazioni geometriche possono proporsi nelle quali la ricerca del discriminante nullo porga la risoluzione della questione.

Supponendo pertanto la cognizione d'esso discriminante, quale può aversi dalla richiamata memoria, daremo qui la risoluzione di alcuni problemi che ne dipendono, non perchè siano importanti, ma solo per mostrare la fecondità e facilità del principio.

2. Sia primieramente il seguente

Problema. Supposto un punto, essere l'origine delle coordinate, determinare una linea nella condizione, che la projezione di essa origine sulle sue tangenti si debba trovare su di una curva data di specie.

Sia

$$Y - y = p(X - x) \tag{1}$$

l'equazione della tangente la linea dimandata, ove $p = f'(x)$, X, Y sono le coordinate variabili, ed x, y quelle del punto di tangenza : sia pure

$$Y_1 = -\frac{1}{p} X_1 \tag{2}$$

l'equazione della normale alla (1).

Facendo coesistere le (1), (2) e designando per X, Y le coordinate del punto comune, le quali devono essere al tempo stesso le coordinate della linea data di specie, avremo

$$X_1 = X, \qquad Y_1 = Y$$

onde

$$X = \frac{p(px - y)}{1 + p^2}, \qquad Y = -\frac{px - y}{1 + p^2}. \tag{3}$$

Supponendo ora che sia

$$Y = \varphi(X) \tag{4}$$

(*) Annali di Scienze matematiche e fisiche. Roma, Novembre 1855, §. 12.

l'equazione della linea data di specie, quella della linea dimandata l'otterremo da

$$(5) \qquad -\frac{px-y}{1+p^2} = \varphi\left(\frac{p(px-y)}{1+p^2}\right).$$

Ora la curva del problema non è altro che l'inviluppo delle tangenti sulle quali cadono le projezioni dell' origine delle coordinate: dunque se nella (5) si ordina rispetto p, l'equazione risultante dovrà ammettere due radici eguali, e quindi il discriminante della forma omogenea corrispondente al grado della equazione, dovrà essere nullo.

3. Sia una retta data da:

$$(a) \qquad Y = aX + b$$

la linea sulla quale si devono trovare le projezioni dell'origine delle coordinate sulle tangenti, avremo

$$-\frac{px-y}{1+p^2} = ap\left(\frac{px-y}{1+p^2}\right) + b$$

da cui

$$(b) \qquad (ax+b)p^2 - (ay-x)p + b - y = 0.$$

Ora per la forma omogenea

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = u$$

il discriminante nullo è

$$B^2 - AC = 0$$

e perchè nel caso presente

$$A = ax + b, \qquad B = -\frac{ay-x}{2}, \qquad C = b - y$$

sarà

$$(c) \qquad (ay-x)^2 - 4(ax+b)(b-y).$$

che rappresenta la parabola conica.

Se nella (c) si pone $b = 0$ si ha

$$ay + x = 0$$

che rappresenta una retta: se poi nella stessa (c) si pone $a = 0$ si trova

$$x^2 - 4b(b-y) = 0$$

cioè l'equazione di una parabola.

Dalla (b) può ricavarsi la (c) ancora per mezzo della differenziazione; poichè sarà

$$2p(ax+b)\mathrm{d}p + ap^2\mathrm{d}x - (ay-x)\mathrm{d}p - (a\mathrm{d}y - \mathrm{d}x)p - \mathrm{d}y = 0$$

ove posto $\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$ e fatte le riduzioni si ha

$$\mathrm{d}p\,[2p(ax+b) - (ay-x)] = 0$$

ossia
$$dp = 0 \,, \qquad e \qquad 2p(ax + b) - (ay - x) = 0 :$$
dalle quali
$$y = mx + n \,, \quad e \quad p = \frac{ay - x}{2(ax + b)} .$$
Sostituito il valore di p nella (b) se ne deduce nuovamente la (c).

4. La linea data di specie sia la lemniscata bernoulliana, cioè
$$(a') \qquad (X^2 + Y^2)^2 = a^2(X^2 - Y^2),$$
ed in questa sostituite l'espressioni (3) avremo
$$\left[\left(\frac{px - y}{1 + p^2}\right)^2 + p^2\left(\frac{px - y}{1 + p^2}\right)^2\right]^2 = a^2\left[\left(\frac{px - y}{1 + p^2}\right)^2 - p^2\left(\frac{px - y}{1 + p^2}\right)^2\right]$$
dalla quale
$$[\,(px - y)^2 - a^2(1 - p^2)\,]\,(px - y)^2 = 0$$
ossia
$$(b') \qquad px - y = 0 \,, \quad (px - y)^2 - a^2(1 - p^2) = 0 :$$
la prima delle quali dà
$$y = Cx$$
e dalla seconda deduciamo la seguente
$$(c') \qquad p^2(x^2 + a^2) - 2pxy + y^2 - a^2 = 0 \,,$$
il cui discriminante nullo ci dà
$$x^2y^2 - (x^2 + a^2)(y^2 - a^2) = 0$$
ovvero
$$x^2 - y^2 = a^2$$
cioè la iperbole equilatera.

Se poi della (c') se ne prende il differenziale, e quindi si pone $dy = p dx$ dopo alcune riduzioni si trova
$$dp = 0 \,, \quad 2p(x^2 + a^2) - 2xy = 0$$
la prima delle quali dà nuovamente la retta, e l'altra
$$p = \frac{xy}{x^2 + a^2}$$
che sostituito nella (c') troviamo
$$(x^2 + a^2)(y^2 - a^2) - x^2y^2 = 0$$
che è lo stesso discriminante nullo.

5. Se in luogo della lemniscata bernoulliana prendiamo più generalmente

$$(a'') \qquad (X^2 + Y^2)^2 = a^2X^2 - b^2Y^2$$

che rappresenta il luogo geometrico delle projezioni dei centri della iperbole qualunque sulle tangenti sue, avremo

$$(b'') \qquad \frac{(px - y)^4}{(1 + p^2)^2} = \frac{(px - y)^2(a^2 - b^2p^2)}{(1 + p^2)^2}$$

dalla quale

$$(px - y)^2 = a^2 - b^2p^2$$

ovvero

$$(c'') \qquad p^2(x^2 + b^2) - 2pxy + y^2 - a^2 = 0 :$$

il cui discriminante nullo è

$$x^2y^2 - (x^2 + b^2)(y^2 - a^2) = 0$$

dalla quale

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

cioè una iperbole qualunque.

Colla consueta differenziazione della (c'') si giungerebbe allo stesso risultato.

6. Il luogo geometrico della projezione del centro di una ellisse sulle sue tangenti è

$$(a''') \qquad (X^2 + Y^2)^2 = a^2X^2 + b^2Y^2 ,$$

e se qui si sostituiscono i valori di X, Y si ottiene

$$(b''') \qquad (px - y)^2 = a^2 + b^2p^2$$

dalla quale

$$(c''') \qquad p^2(x^2 - b^2) - 2pxy + y^2 - a^2 = 0$$

il cui discriminante nullo dà

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

7. Sia ancora una parabola conica il luogo geometrico delle projezioni del punto origine delle coordinate sulle tangenti : sarà

$$(a^{\text{v}}) \qquad Y^2 = aX.$$

Sostituiti in questa i consueti valori si ottiene

$$(b^{\text{v}}) \qquad \left(\frac{px - y}{1 + p^2}\right)^2 = ap\left(\frac{px - y}{1 + p^2}\right)$$

dalla quale

$$(c^{\text{v}}) \qquad ap^3 + (a - x)p + y = 0.$$

Ora per la forma omogenea simigliante

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 = u$$

il discriminante nullo è

$$(A^2D + 2B^3 - 2ABC)^2 - 4(B^2 - AC)^3 = 0:$$

dal confronto colla (c^{iv}) abbiamo

$$A = a, \quad B = 0, \quad C = \frac{a - x}{3}, \quad D = y$$

che sostituiti ci danno facilmente

$$y^2 = \frac{4(a - x)^3}{27a}$$

cioè una parabola cubica.

8. Sia pure una ellisse la projezione del punto origine delle coordinate sulle tangenti. Usando i consueti simboli avremo

$$(a^{\text{v}}) \qquad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1:$$

nella quale fatte le solite sostituzioni otteniamo

$$(b^{\text{v}}) \qquad (px - y)^2(b^2p^2 + a^2) = a^2b^2(1 + p^2)^2,$$

che sviluppata ed ordinata per le potenze di p, si ha

$$(c^{\text{v}}) \quad (b^2x^2 - a^2b^2)p^4 - 2b^2xyp^3 + (b^2y^2 + a^2x^2 - a^2b^2)p^2 - 2a^2xyp + a^2(y^2 - b^2) = 0$$

Ora essendo

$$Ax^4 + 4Bx^3y + 6Cx^2y^2 + 4Dxy^3 + Ey^4 = u$$

la simigliante forma omogenea del quarto grado, il suo discriminante nullo è

$$(3C^2 - 4BD + AE)^3 - 27(ACE - AD^2 - EB^2 - C^3 + 2BCD)^2 = 0.$$

Dal confronto della forma omogenea di quarto grado colla (c^{v}) si ricaverebbero i valori dei coefficienti ch'entrano nella composizione del discriminante. Però in vista delle espressioni piuttosto complicate che risulterebbero per essi coefficienti, crediamo utile stabilire altra equazione di quarto grado, che nell'essere più semplice, abbia nota relazione colla (c^{v}).

A tal fine riprenderemo la (b^{v}) e da essa dedurremo

$$(px - y)\sqrt{a^2 + b^2p^2} = ab(1 + p^2).$$

Si ponga

$$\sqrt{a^2 + b^2p^2} = bp - u$$

da cui

$$p = \frac{u^2 - a^2}{2bu}, \quad \sqrt{a^2 + b^2p^2} = -\frac{u^2 + a^2}{2u}.$$

Sostituendo avremo

$$(a^2x - u^2x + 2buy)(a^2 + u^2) = a(4b^2u^2 + a^4 - 2a^2u^2 + u^4)$$

che ordinata risulta

$$(a + x)u^4 - 2byu^3 + 2(2ab^2 - a^3)u^2 - 2a^2byu + a^4(a - x) = 0 .$$

Ora per la relazione posta fra p ed u è chiaro che se la p ha due valori eguali, anche la u ne deve ammettere due eguali; quindi la equazione in u del quarto grado deve ammettere due radici eguali, è così deve esser nullo il suo discriminante.

Dal confronto di questa equazione colla forma omogenea simigliante abbiamo le seguenti relazioni fra i coefficienti

$$\mathrm{A} = a + x , \quad \mathrm{B} = -\frac{by}{2}, \ \mathrm{C} = \frac{2b^2a - a^3}{3}, \ \mathrm{D} = -\frac{a^2by}{2}, \quad \mathrm{E} = a^4(a - x)$$

e quindi

$$\left.\begin{array}{l}\left[3\left(\dfrac{2ab^2 - a^3}{3}\right)^2 - \dfrac{4a^2b^2y^2}{4} + a^4(a^2 - x^2)\right]^3 \\ -27\left[a^4(a^2 - x^2)\left(\dfrac{2ab^2 - a^3}{3}\right) - (a+x)\dfrac{a^2b^2y^2}{4} - a^4(a-x)\dfrac{b^2y^2}{4} - \left(\dfrac{2ab^2 - a^3}{3}\right)^3 + \dfrac{2a^2b^2y^2}{4}\left(\dfrac{2ab^2 - a^3}{3}\right)\right]^2\end{array}\right\} = 0$$

ove tolti i fattori comuni abbiamo

$$\left.\begin{array}{l}\left[\dfrac{(2b^2 - a^2)^2}{3} - b^2y^2 - a^2x^2 + a^4\right]^3 \\ -27\left[\dfrac{a^2(a^2 - x^2)(2b^2 - a^2)}{3} - \dfrac{a(a+x)b^2y^2 + a(a-x)b^2y^2}{4} - \dfrac{(2b^2 - a^2)}{27} + \dfrac{b^2y^2(2b^2 - a^2)}{6}\right]^2\end{array}\right\} = 0$$

e fatte alcune riduzioni si ottiene :

$$[4(a^4 + b^4 - a^2b^2) - 3(a^2x^2 + b^2y^2)]^3 - [4(a^2 + b^2)(2b^2 - a^2)(2a^2 - b^2) - 9b^2(2a^2 - b^2)y^2 - 9a^2(2b^2 - a^2)x^2]^2 = 0$$

che è l'equazione della linea di Talbot, la quale è una soluzione singolare dell'equazione differenziale (c^{v}), mentre si otterrebbe col prendere il differenziale di essa, col porre $p\,dx$ in luogo di dy, e coll'eguagliare a zero il coefficiente di dp : dopo di che si dovrebbe eseguire l'eliminazione di p fra due equazioni, l'una di quarto grado e l'altra di terzo : di qui risulta la maggior speditezza e semplicità dell'uso del discriminante nullo per la soluzione di alcuni problemi.

Se la linea data di specie è una circonferenza, essendo allora $a = b$ avremo per la linea cercata

$$[4a^4 - 3a^2(x^2 + y^2)]^3 - [8a^6 - 9a^4(x^2 + y^2)]^2 = 0$$

dalla quale dopo le necessarie riduzioni si ricava $x^2 + y^2 = a^2$, cioè la circonferenza proposta.

9. La curva data di specie sia in fine una iperbola equilatera,

$$(a^{VI}) \qquad X^2 - Y^2 = a^2$$

ove sostituiti i valori per X, Y si ha:

$$\frac{(px - y)^2(p^2 - 1)}{(1 + p^2)^2} = a^2$$

da cui

$$(b^{VI}) \qquad \frac{px - y}{1 + p^2}\sqrt{p^2 - 1} = a,$$

e facendo uso della sostituzione nota avremo

$$\left(\frac{u^2 + 1}{2u}x - y\right)\left(\frac{1 - u^2}{2u}\right) = a\left(\frac{4u^2 + u^4 + 2u^2 + 1}{4u^2}\right)$$

dalla quale

$$(a + x)u^4 - 4\frac{y}{2}u^3 + 6au^2 + 4\frac{y}{2}u + a - x = 0$$

che paragonata colla forma omogenea simigliante di quarto grado, avremo pei coefficienti

$$A = a + x, \quad B = -\frac{y}{2}, \quad C = a, \quad D = \frac{y}{2}, \quad E = a - x$$

onde il relativo discriminante nullo sarà

$$\left(3a^2 + 4\frac{y^2}{4} + a^2 - x^2\right)^3 - 27\left[a(a^2 - x^2) - (a + x)\frac{y^2}{4} - (a - x)\frac{y^2}{4} - a^3 - 2\frac{ay^2}{4}\right]^2 = 0$$

che ridotto dà

$$(4a^2 - x^2 + y^2)^3 - 27a^2(x^2 + y^2)^2 = 0$$

cioè una curva del sest'ordine.

È facile riconoscere che questa curva, la quale deriva da quella di Talbot, col porre $b^2 = -a^2$, è dotata di centro, ed incontra l'asse delle ascisse in due punti dati da

$$y = 0, \qquad (4a^2 - x^2)^3 = 27a^2x^4,$$

ove quest'ultima è verificata da

$$x = \pm a.$$

10. La condizione del discriminante nullo può servire ancora per la determinazione delle evolute delle curve piane, le quali in fondo non sono altro che inviluppi di normali di una data linea. Di fatti

$$(1) \qquad Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)$$

è l'equazione alla normale, nella quale x, y sono le coordinate di qualunque punto della linea data cui la (1) è normale, ed X, Y le coordinate variabili della normale.

Coesistendo colla (1) ancora

$$(2) \qquad y = f(x)$$

si troverà una equazione che sarà data soltanto in x od y, ed il descriminante di questa eguagliato a zero ci porgerà una equazione fra X, Y e quantità costanti.

11. Sia la parabola di equazione

$$y^2 = px,$$

essendo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$$

sarà, dopo aver dato tutto in y,

$$y^3 - \frac{p(2X - p)}{2} y - p^2 \frac{Y}{2} = 0$$

e così dal paragone colla forma omogenea simigliante, ricavandosi

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = -\frac{p(2X - p)}{6}, \quad D = -\frac{p^2 Y}{2}$$

si otterrà

$$\frac{p^4 Y^2}{4} - \frac{4p^3(2X - p)^3}{6^3} = 0:$$

da cui

$$Y^2 = \frac{2}{27p}(2X - p)^3$$

come è noto.

12. Sia ancora la ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

da cui

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{a^2 y}{b^2 x},$$

e così l'equazione alla normale sarà

$$b^2 Yy - a^2 Xx + e^2 xy = 0:$$

nella quale dovremo sostituire

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

e quindi col consueto artificio togliere la irrazionalità. Possiamo peraltro profittare

dell'equazioni circolari della ellisse

$$x = a \cos \varphi\,, \qquad y = b \operatorname{sen} \varphi$$

e quindi per mezzo di una sostituzione usata dal Sig. Prof. Tortolini in un problema della medesima indole, e che si trova nella memoria indicata (§. 1.) arriveremo più facilmente alla equazione finale.

Sostituendo avremo

$$bY \cos \varphi - aX \operatorname{sen} \varphi + e^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi = 0:$$

si ponga

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} = u$$

troveremo

$$\cos \varphi = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \qquad \operatorname{sen} \varphi = \frac{2u}{1 + u^2}$$

e quindi

$$bY(1 - u^4) - 2aXu(1 + u^2) + 2e^2u(1 - u^2) = 0$$

la quale ordinata e posta sotto la consueta forma, pel facile paragone dei coefficienti che compongono il discriminante della simigliante forma omogenea, avremo

$$bYu^4 + 4\left(\frac{aX + e^2}{2}\right)u^3 + 4\left(\frac{aX - e^2}{2}\right)u - bY = 0.$$

Ora essendo

$$A = bY\,, \quad B = \frac{aX + e^2}{2}, \quad C = 0\,, \quad D = \frac{aX - e^2}{2}, \quad E = -bY\,,$$

il discriminante diverrà

$$\left[-\frac{4(a^2X^2 - e^4)}{4} - b^2Y^2\right]^3 - 27\left[-bY\left(\frac{aX - e^2}{2}\right)^2 + bY\left(\frac{aX + e^2}{2}\right)^2\right]^2 = 0$$

dal quale

$$a^2X^2 + b^2Y^2 + 3a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}} e^{\frac{4}{3}} X^{\frac{2}{3}} Y^{\frac{2}{3}} = e^4$$

che paragonata con

$$(m + n)^3 = l^3$$

troviamo

$$m = a^{\frac{2}{3}} X^{\frac{2}{3}}\,, \qquad n = b^{\frac{2}{3}} Y^{\frac{2}{3}}\,, \qquad l = (e^2)^{\frac{2}{3}}$$

onde per l'evoluta dell'ellisse

$$a^{\frac{2}{3}} X^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} Y^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

Se qui si muta b^2 in $-b^2$ si ha l'evoluta della iperbole.

13. Lo stesso principio può ancora applicarsi alla determinazione della caustica di riflessione.

S'immagini una sorgente luminosa O nella quale intenderemo posta l'origine delle coordinate: sia

$$y = f(x)$$

l'equazione della curva riflettente, e su di essa sia preso un punto M di coordinate x, y: il raggio incidente sarà OM, ed MF diremo il raggio riflesso, segnando per F il punto ove esso taglia l'asse delle ascisse: si diranno X, Y le coordinate variabili di qualunque punto di esso raggio riflesso. I due raggi riflesso ed incidente sono egualmente inclinati alla tangente, e chiamato α l'angolo che uno di essi raggi forma colla tangente, avremo

$$\tang \alpha = \frac{y - px}{x + py} \cdot$$

Detto γ l'angolo che il raggio riflesso forma coll'asse delle ascisse, avremo

$$\tang \gamma = \frac{2px - y(1 - p^2)}{2py + x(1 - p^2)}$$

e quindi

$$\mathrm{Y} - y = \frac{2px - (1 - p^2)y}{2py + (1 - p^2)x} (\mathrm{X} - x)$$

sarà l'equazione del raggio riflesso.

Se ora si suppone che la sorgente si trovi sull'asse delle ascisse, ma ad una distanza a dall'origine, nel valore dell'angolo γ si dovrà porre $x + a$ in luogo della x, e così sarà

$$\tang \gamma = \frac{2p(x + a) - y(1 - p^2)}{(x + a)(1 - p^2) + 2py}$$

onde se si suppone $a = \infty$, cioè che i raggi incidenti siano paralleli all'asse delle ascisse, sarà

$$\tang \gamma = \frac{2p}{1 - p^2}$$

e per l'equazione del raggio riflesso avremo

$$\mathrm{Y} - y = \frac{2p}{1 - p^2} (\mathrm{X} - x) \cdot$$

Ora la caustica non è altro se non che una linea la quale deriva dai successivi incontri dei raggi riflessi, onde essa è un inviluppo. Dunque se nell'equazione del raggio riflesso si elimina la y o la x per mezzo della equazione alla curva riflettente, si avrà una equazione il cui discriminante dovrà essere nullo.

14. Sia pertanto una ellisse la curva data, e poniamo che la sorgente luminosa sia in un fuoco. Posta qui l'origine delle coordinate avremo per la sua equazione

particolare

$$\frac{(x-e)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

dalla quale

$$p=-\frac{b^2(x-e)}{a^2y},$$

ed usando le coordinate circolari

$$x-e=a\cos\varphi\,,\quad y=b\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

avremo

$$p=-\frac{b\cos\varphi}{a\,\mathrm{sen}\,\varphi},$$

e perciò prendendo a calcolare a parte

$$\mathrm{tang}\,\gamma=\frac{2px-y(1-p^2)}{x(1-p^2)+2py}$$

avremo

$$\mathrm{tang}\,\gamma=\frac{[2a\cos\varphi(e+a\cos\varphi)+a^2\mathrm{sen}^2\varphi-b^2\cos^2\varphi]b\,\mathrm{sen}\,\varphi}{(e+a\cos\varphi)b^2\cos^2\varphi+2ab^2\mathrm{sen}^2\varphi\cos\varphi-(e+a\cos\varphi)a^2\mathrm{sen}^2\varphi}$$

e dopo alcune riduzioni

$$\mathrm{tang}\,\gamma=\frac{(a+e\cos\varphi)^2b\,\mathrm{sen}\,\varphi}{(a+e\cos\varphi)^2(a\cos\varphi-e)}=\frac{b\,\mathrm{sen}\,\varphi}{a\cos\varphi-e}$$

e per l'equazione del raggio riflesso avremo

$$\mathrm{Y}-b\,\mathrm{sen}\,\varphi=\frac{b\,\mathrm{sen}\,\varphi}{a\cos\varphi-e}\,(\mathrm{X}-a\cos\varphi-e)$$

dalla quale

$$a\mathrm{Y}\cos\varphi+b(2e-\mathrm{X})\mathrm{sen}\,\varphi-e\mathrm{Y}=0.$$

Qui si potrebbe far uso della sostituzione

$$\cos\varphi=\frac{1-u^2}{1+u^2},\qquad \mathrm{sen}\,\varphi=\frac{2u}{1+u^2}$$

colla quale si otterrebbe rispetto u una equazione di secondo grado. Ma se nella stessa equazione si dà tutto in seno troveremo quadrando

$$[b^2(2e-\mathrm{X})^2+a^2\mathrm{Y}^2]\mathrm{sen}^2\varphi-2b\mathrm{Y}(2e-\mathrm{X})\mathrm{sen}\,\varphi-b^2\mathrm{Y}^2=0$$

il cui discriminante nullo è

$$b^2e^2\mathrm{Y}^2(2e-\mathrm{X})^2=-b^2\mathrm{Y}^2[b^2(2e-\mathrm{X})^2+a^2\mathrm{Y}^2]$$

dal quale con facile riduzione si trae

$$\mathrm{Y}^2+(2e-\mathrm{X})^2=0$$

che non può verificarsi se non coll'essere

$$Y = 0\,, \qquad X = 2e\,,$$

onde tutti i raggi riflessi passano per l'altro fuoco, come doveva essere.

15. Sia un circolo la curva riflettente, e supponghiamo che i raggi cadano paralleli su di esso, onde l'equazione del raggio riflesso sia

$$Y - y = \frac{2p}{1 - p^2}(X - x)$$

Posta l'origine delle coordinate nel centro avremo

$$p = -\frac{x}{y}$$

e quindi

$$Y - y = \frac{2xy}{x^2 - y^2}(X - x)$$

dalla quale

$$Yy^2 - Yx^2 + 2Xy\sqrt{r^2 - y^2} - r^2y = 0.$$

Ora facendo

$$y = r \operatorname{sen} \varphi$$

sarà

$$Y \operatorname{sen}^2\varphi - Y \cos^2\varphi + 2X \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi - r \operatorname{sen}\varphi = 0$$

ed usando la sostituzione

$$\cos\varphi = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \qquad \operatorname{sen}\varphi = \frac{2u}{1 + u^2}$$

si ha

$$Yu^4 + 2(2X + r)u^3 - 6Yu^2 - 2(2X - r)u + Y = 0$$

e perciò

$$A = Y\,, \quad B = \frac{2X + r}{2}\,, \quad C - Y\,, \quad D = -\frac{2X - r}{2}\,, \quad E = Y$$

che sostituiti nel solito discriminante si trova l'equazione

$$(4Y^2 + 4X^2 - r^2)^3 = 47r^4Y^2$$

la quale rappresenta una epicicloide.

16. Termineremo questi problemi con osservare che le formole stabilite al (§ 2) sono di tal natura che data la specie della linea sulla quale si debbono trovare le projezioni dell'origine delle coordinate sulle tangenti si determina la linea alla quale quelle rette sono tangenti, e viceversa data la linea alla quale queste rette debbono essere tangenti, si assegna il luogo geometrico di quelle projezioni.

In quest'ultimo caso si hanno le tre equazioni

*

$$(1) \qquad y = f(x)\,, \quad Y = -\frac{px - y}{1 + p^2}\,, \quad X = \frac{p(px - y)}{1 + p^2}$$

dalle quali ne risulta

$$(2) \qquad Y = F(X).$$

Si dicano ora X_1, Y_1 le coordinate variabili della normale del nuovo luogo geometrico dato dalla (2), la sua equazione sarà

$$(3) \qquad Y_1 - Y = -\frac{dX}{dY}(X_1 - X)\,.$$

Ora dalle (1) deduciamo colla differenziazione

$$-dY = \frac{dp[x(1 - p^2) + 2py]}{(1 + p^2)^2}\,, \qquad dX = \frac{dp(2px - y + p^2y)}{(1 + p^2)^2}$$

e quindi

$$(4) \qquad -\frac{dX}{dY} = \frac{2px - y + p^2y}{x + 2py - p^2x}$$

onde la (3) si muta

$$Y_1 - Y = \frac{2px - y + p^2y}{x + 2py - p^2x}(X_1 - X)$$

che rappresenta la normale al luogo geometrico (2) nel punto di coordinate X, Y corrispondente al punto x, y della curva data.

Ora se al numeratore della (4) si aggiunge e toglie y, esso si muta in

$$2(px - y) + y(1 + p^2)$$

ovvero

$$2(1 + p^2)\left[\frac{px - y}{1 + p^2} + \frac{y}{2}\right] = 2(1 + p^2)\left[-Y + \frac{y}{2}\right].$$

Se si aggiunge e toglie p^2x al denominatore, esso diventa

$$x(1 + p^2) - 2p(px - p)$$

ovvero

$$2(1 + p^2)\left[-\frac{p(px - y)}{1 + p^2} + \frac{x}{2}\right] = 2(1 + p^2)\left[-X + \frac{x}{2}\right]$$

e così avremo

$$(5) \qquad Y_1 - Y = \frac{Y - \frac{y}{2}}{X - \frac{x}{2}}(X_1 - X)$$

per l'equazione alla normale della curva cercata.

Ora è facile riconoscere che la (5) è l'equazione di una retta obbligata a passare pei due punti

$$X, Y; \quad \frac{x}{2}, \frac{y}{2}$$

il primo dei quali appartiene al luogo geometrico (2), e l'altro è il punto medio del raggio vettore che congiunge il punto projettante con quello di tangenza sulla curva data. Di qui il seguente:

Teorema. *Se si congiunge il punto projettato sulla tangente ad una data curva piana col punto medio del raggio vettore che dal punto projettante va al punto di tangenza, si ottiene una retta normale alla curva luogo geometrico della projezione dello stesso punto su tutte le tangenti.*

18. Merita di essere avvertita la espressione dell' arco della curva (2) in funzione degli elementi dipendenti dalla curva data $y = f(x)$.

Si ponga

$$dS^2 = dX^2 + dY^2$$

ed in questa si sostituiscano i valori di dX, dY dati in x, y, ed avremo

$$dS^2 = \frac{dp^2}{(1+p^2)^4}\left[(x^2+y^2)(1-p^2)^2 + (x^2+y^2).4p^2\right]$$

ovvero

$$dS^2 = \frac{(x^2+y^2)dp^2}{(1+p^2)^2}.$$

Si rappresenti con R il raggio vettore nella curva data onde sia

$$R^2 = x^2 + y^2$$

e così

$$dS = \pm\frac{R\,dp}{1+p^2}$$

Ora abbiamo

$$dp = \frac{d^2y}{dx}, \qquad 1+p^2 = \frac{ds^2}{dx^2}$$

e perciò

$$dS = \pm R.\frac{dx d^2y}{ds^2}.$$

Rappresentando per r il raggio di curvatura della proposta linea, corrispondente al punto di coordinate x, y, si ha

$$r = \pm\frac{ds^3}{dx\ d^2y}$$

da cui

$$\pm\frac{dx\ d^2y}{ds^2} = \frac{ds}{r}$$

onde

$$dS = R\frac{ds}{r},$$

ossia

$$\frac{dS}{ds} = \frac{R}{r}.$$

MÉMOIRE

SUR LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES SURFACES DU SECOND ORDRE,

PAR Mr. CH. MERAY

Docteur-ès-Sciences.

AVERTISSEMENT.

Ce mémoire contient l'application des principes exposés par M. Chasles, dans son *Traité de géométrie supérieure*, à la théorie des surfaces du second ordre. Je l'ai divisé en huit paragraphes qui renferment, le premier : les propriétés des figures corrélatives sur les quelles s'appuyent mes raisonnements; le second: la génération des surfaces du second ordre, leur classification et la théorie des cônes; les trois suivants : les propriétés des pôles, plans polaires, centre, axes, génératrices rectilignes; le sixième : un second mode de génération des mêmes surfaces et les conséquences qui en résultent; les deux derniers enfin, la théorie des lignes focales et des surfaces homofocales.

§. I. *Exposition de quelques propriétés des figures corrélatives planes.*

1. Je vais rappeler quelques propriétés des figures corrélatives, dont je ferai souvent usage. On consultera pour plus de détails la *Géométrie supérieure* de M. Chasles.

Deux figures planes F, F' sont dites *corrélatives*, si, la première étant composée de points m, m_1 etc., et la seconde de droites M', M'_1 etc., à un quelconque m, des points de la première figure, correspond une droite M' de la seconde, et de telle sorte que le point m venant à décrire une droite quelconque M, la droite M' tourne autour d'un point fixe m' et forme ainsi un faisceau homographique à la division tracée par le point m sur la droite M. On pourra encore dire, si on veut donner un sens moins restreint à une expression employée par M. Chasles (*Principe de correspondence entre deux objets variables, Comptes rendus* Tome XLI), que le point m correspond *anharmoniquement* à la droite M' et réciproquement. On verra sans peine d'après la définition précédente, que les éléments m' et M se correspondent anharmoniquement.

Comme exemple de figures corrélatives, on peut citer deux figures contenues dans le même plan, et dont l'une est formée par les polaires des points de l'autre, par rapport à une même section conique; mais on se trouve alors dans un cas particulier.

2. Pour construire deux figures corrélatives F, F', il suffit généralement de con-

naître quatre points a, b, c, d, de la première, correspondants à quatre droites A', B', C', D', données dans la seconde.

Ces points et ces droites peuvent être pris à volonté, et dans tous les cas, la construction des figures dont ils doivent faire partie, n'offrira aucune difficulté; il faudra seulement, ce qui est évident, que des droites concourantes correspondent toujours à des points donnés en ligne droite.

3. La définition des figures corrélatives, entraine immédiatement les deux propositions suivantes :

Deux figures corrélatives à une troisième, sont homographiques.

Deux figures respectivement homographiques à deux figures corrélatives, sont également corrélatives.

4. Je nommerai *points associés*, deux points tels que m et m', faisant partie de deux figures corrélatives et dont chacun est située sur la droite corrélative de l'autre; et *droites associées* des droites M, M' dont chacune contient le point qui correspond à l'autre. Un point quelconque de l'une des figures, a une infinité d'associés en ligne droite; une droite quelconque a de même une infinité d'associées concourant au point qui lui correspond.

Nous pouvons faire dès à présent une remarque qui nous sera utile : si des points n, n' correspondent anharmoniquement à des droites associées M, M', ou même à des points associés, (c'est–à–dire s'ils sont homologues de ces points dans des figures homographiques), ils seront eux-mêmes associés; on fait aisément une remarque analogue, sur les lignes droites.

5. Il est facile d'écrire l'équation qui existe entre les coordonnées rectilignes des deux points associés m, m'; si on désigne en effet par x, y, les coordonnées du premier point, rapporté à deux axes pris à volonté dans la figure dont il fait partie; par x', y', les coordonnées du second obtenues de la même manière, et enfin par α, β, γ ; α', β', γ' ; $\alpha'', \beta'', \gamma''$, neuf constantes convenablement choisies, on aura l'équation connue:

$$(\alpha x + \beta y + \gamma)x' + (\alpha' x + \beta' y + \gamma')y' + (\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'') = 0 \qquad (1)$$

Une équation toute semblable pourrait être obtenue entre les coordonnées tangentielles des deux droites associées.

6. Nous avons supposé jusqu'à présent, que les plans F, F' étaient situés d'une manière quelconque; s'ils viennent à se confondre, certains points pourront être situés sur leurs droites corrélatives ; ces points qui se confondent ainsi avec un de leurs points associés seront nommés *points doubles*. On établit facilement sur les points doubles les propositions suivantes :

Le lieu des points associés doubles est une certaine section conique.

Nous désignerons à l'aide de la lettre ε cette conique qui se présentera souvent dans nos raisonnements.

L'enveloppe des droites associées doubles, que l'on définira comme les points doubles, est également une certaine section conique $\mathcal{E}$.

Les deux courbes ε et $\mathcal{E}$ ne coïncident généralement pas et peuvent d'ailleurs être réelles ou imaginaires.

Pour avoir l'équation de la courbe ε en coordonnées rectilignes, il suffira de supposer que les deux systèmes d'axes coordonnés du N.° 5 se confondent, et de poser alors dans l'équation (1)

$$x = x', \quad y = y'.$$

On remarquera que les neuf coefficients de cette équation se réduisent à huit. On obtiendra de la même manière l'équation de la courbe $\mathcal{E}$ rapportée à des coordonnées tangentielles, et on en déduira si on veut, l'équation en coordonnées rectilignes.

7. On trouve au N.° 600 de la *Géométrie supérieure* de M. Chasles la démonstration du théorème suivant :

Etant donné dans un même plan deux figures corrélatives, il y a trois points et trois droites (deux des trois peuvent être imaginaires) dont les éléments corrélatifs pris successivement dans les deux figures se confondent.

Il peut arriver qu'un point quelconque du plan ait même droite corrélative dans les deux figures; les courbes ε et $\mathcal{E}$ cessent alors d'être distinctes, et les figures proposées sont nommées *polaires réciproques*, par rapport à la conique ε ou $\mathcal{E}$; les points que nous sommes convenus de nommer associés, deviennent ceux qu'on nomme *conjugués*, dans la théorie des polaires réciproques.

Pour que cette circonstance se présente il est nécessaire et suffisant, que le nombre des points dont les droites corrélatives prises dans les deux figures coïncident, soit supérieur à trois.

8. Nous avons dit au N.° 2, que quatre couples d'éléments correspondants suffisent pour construire complétement deux figures corrélatives; mais les figures que nous aurons à considérer dans la suite, ne nous seront pas toujours données de cette manière : nous devrons en construire, connaissant seulement un certain nombre de couples de points associés ou de droites associées. Il importe donc de résoudre les problèmes suivants :

1.° *Combien faut-il connaître de couples de points associés pour pouvoir construire deux figures corrélatives ?*

2.° *Effectuer la construction à l'aide d'un nombre suffisant de données.*

L'équation (1) du N.° 5 fournit immédiatement la réponse à la première question; cette équation renfermant en effet neuf coefficients qui se réduisent à huit par

la division, le nombre cherché est huit. La solution de la seconde question est loin d'être aussi simple, quand on la considère dans toute sa généralité, mais nous n'aurons besoin de la connaître que dans le cas où, les figures étant dans le même plan, les points associés que l'on donne, sont tous relatifs à un même point λ (nous nommons ainsi deux points associés en ligne droite avec ce point λ). On voit alors aisément que dans ces conditions, sept couples de points associés suffisent pour construire, non pas les figures corrélatives entières, mais seulement tous les couples de points associés relatifs au point λ, et en particulier la courbe ε lieu des points doubles. Nous avons en effet remarqué au N.° 6, que l'équation de la courbe ε contient seulement huit coefficients distincts réducibles à sept par la division, d'où il résulte que sept systèmes de valeurs simultanées des variables x, y, x', y', suffisent pour calculer ces paramètres. Nous verrons dans un autre paragraphe comment on peut construire géométriquement cette courbe, contentons nous pour le moment de voir ce qu'il faut faire, cette courbe une fois connue, pour construire tous les couples de points associés relatifs au point λ.

Il faut commencer par chercher les deux droites corrélatives L, L$'$ du point λ considéré comme appartenant à l'une et à l'autre des figures; désignons pour cela par (a, a'), (a_1, a'_1), deux des couples de points associés donnés, et par (φ, χ), (φ_1, χ_1), les intersections de la conique ε, que l'on suppose connue, avec les droites $\overline{a\,a'}$, $\overline{a_1\,a'_1}$.

Les points associés situés sur la droite $\overline{a\,a'}$, y tracent évidemment deux divisions homographiques, dont φ et χ sont les points doubles, et ces divisions homographiques sont complétement déterminées, puisqu'on en connait les points doubles φ, χ, ainsi que deux points homologues a, a'; on peut donc trouver les homologues l, l' du du point λ considéré comme appartenant à l'une et à l'autre de ces divisions; on construira de même les deux homologues l_1, l'_1, du point λ considéré comme faisant partie des divisions qui existent de la même manière sur la droite $\overline{a_1\,a'_1}$; et on voit sans peine que les droites cherchées ne sont autre chose que les droites $\overline{l\,l_1}$, $\overline{l'\,l'_1}$.

Maintenant que les droites désignées par L, L$'$ nous sont connues, rien n'est plus facile que de construire tous les points associés contenus sur une même droite quelconque Λ, passant par le point λ; il suffit pour cela, de construire les deux divisions homographiques dont les points doubles sont $\overline{\Lambda\varepsilon}$ (la notation $\overline{\Lambda\varepsilon}$ désignant les intersections des lignes Λ et ε), et dans les quelles, λ et ΛL$'$ forment un couple de points homologues.

La construction complète des figures corrélatives exigera, comme il est aisé de le reconnaître, que l'on se donne, outre les sept couples de points tels que (a, a'), la droite corrélative de l'un de ces points; on pourra d'ailleurs la prendre arbitrairement pourvu qu'elle contienne l'associé de ce point, et la construction des figures s'opérera de suite avec la plus grande facilité. Le mouvement de cette droite autour

du point par lequel elle est assujétie à passer, influe seulement sur la forme et la grandeur de la conique désignée précédemment par $\mathcal{E}$.

Il est à remarquer que lorsque les droites L, L', cessent d'être distinctes, les points associés deviennent conjugués par rapport à la conique ε les figures ne sont pas pour cela polaires réciproques, mais elle pourront le devenir si on choisit convenablement la droite arbitraire, dont la connaissance complète, comme on vient de le voir, la détermination des figures.

Tout ce qui vient d'être dit sur les points associés relatifs à un même point, se reproduit sans modifications pour les droites associées relatives à une même droite, c'est-à-dire, dont les points de concours se trouvent sur cette droite.

9. Si on joint par des lignes droites, un point fixe O à tous les points d'une figure plane F, et si on fait passer des plans par un autre point fixe O', et par toutes les droites d'une figure F' corrélative à la première, on obtiendra deux faisceaux, l'un de droites, l'autre de plans, qui traceront sur un plan quelconque deux figures corrélatives; nous nommerons *corrélatifs*, deux semblables faisceaux, et nous dirons que les droites du premier correspondent anharmoniquement aux plans du second.

Ces faisceaux, de même que les figures corrélatives, peuvent donner lieu encore à un très grand nombre de propositions analogues à celles que l'on démontre sur les faisceaux et les divisions homographiques; ces développements, malgré leur importance, ne peuvent trouver place ici, où on se propose simplement de donner une idée des services que la géométrie peut encore rendre, à la théorie des surfaces du second ordre.

§. II. *Génération et classification des surfaces du second ordre.*

10. Concevons deux faisceaux corrélatifs dont les centres O, O', différent; une droite X du premier faisceaux coupe le plan x' qui lui correspond dans l'autre, en un point m dont la position varie avec la direction de la droite X, le lieu du point m est une certaine surface ς dont il est facile de déterminer la nature.

Cette surface est du deuxième degré, car pour obtenir les points ou elle coupe une sécante quelconque S, il faudra supposer que la droite X s'appuye constamment sur cette sécante en un point mobile x, chercher le point d'intersection x' de la même sécante avec le plan X', et enfin construire les points doubles des divisions homographiques que tracent évidemment les points x, x' sur la droite S; le nombre de ces points doubles ne peuvant être supérieur à deux sans être indéterminé, on conclut que la surface ς est du deuxième degré comme on l'avait annoncé (*).

(*) Pour arriver à la même conclusion, on cherchera encore, si on le veut, l'équation en coordonnées rectilignes du lieu décrit par le point m, recherche qui n'offre aucune difficulté.

Un plan quelconque s coupera donc cette surface suivant une section conique, qui ne sera pas autre chose, que la courbe ε relative aux deux figures corrélatives déterminées sur le plan s par les faisceaux o, o'.

On reconnaitra sans peine, que la surface ς contient les points o, o', et que les plans tangents en ces points sont: au point o, le plan ϖ qui correspond à la droite $\overline{oo'}$ rayon du faisceau o'; et au point o', le plan ϖ' qui correspond à la même droite considérée comme appartenant à l'autre faisceau.

11. On peut se demander si toutes les surfaces, qui rapportées à des coordonnées rectilignes, offrent des équations du second degré, peuvent être engendrées de la même manière que la surface ς. Nous allons répondre affirmativement à cette question, en prouvant, comme il suffit évidemment de le faire, que les faisceaux o, o' du n.° précédent étant convenablement choisis, donnent naissance à une surface contenant neuf points arbitraires.

Si on prend en effet deux points quelconques o, o', parmi les neuf points donnés, et si on les joint par des lignes droites aux sept autres, les quatorze droites ainsi obtenues, couperont un plan quelconque s, en des points qui seront deux à deux en ligne droite, avec le point d'intersection λ du plan s, par la droite $\overline{oo'}$; on pourra donc (n.° 8) considérer ces sept couples de points, comme associés relativement au point λ dans deux figures corrélatives; et les faisceaux corrélatifs formés par les droites qui joignent le point o aux différents points de l'une de ces figures, et par les plans qui contiennent outre le point o', les droites de l'autre figure, engendreront par les intersections mutuelles de leurs éléments correspondants, une surface du second ordre contenant les neuf points donnés.

Il me reste maintenant à indiquer la construction de la courbe ε, sur laquelle on a fait reposer au n.° 8, celle des figures corrélatives que doivent tracer dans le plan s les faisceaux générateurs o, o'; cette courbe, on le remarquera, est l'intersection du plan s par la surface qui contient les neuf points donnés.

On supposera, ce qui est permis, que le plan s contient trois des points donnés que nous désignerons par p, q, r; ces points appartiendront nécessairement à la section conique ε. Pour achever la construction de cette courbe, on peut employer simplement le procédé donné par M.r Chasles, pour trouver l'intersection d'une surface du second ordre dont on donné neuf points, avec le plan qui contient trois de ces points (*Principes de correspondance entre deux objets variables*); mais on peut aussi en modifiant légèrement cette méthode, ramener toutes les constructions dans un même plan, chose importante pour la solution du second problème posé au n.° 8. Voici en effet comment on y parviendra:

Désignons par $(a_1\, a'_1)$, $(a_2\, a'_2)$, $(a_3\, a'_3)$, $(a_4\, a'_4)$ les intersections du plan s par les droites qui joignent les centres o, o', aux quatre points donnés α_1, α_2, α_3, α_4,

autres que les points p, q, r; ces huit points et les points p, q, r suffirent pour déterminer complétement la courbe ε; si donc on prend à volonté deux points Ω, Ω' en ligne droite avec le point λ, la surface du second ordre qui passe par les neuf points p, q, r, Ω, Ω', $\widehat{\overline{\Omega a_1}\,\overline{\Omega' a'_1}}$, . . . etc. contient ainsi la courbe ε. On voit aussi immédiatement que pour amener dans le plan s toute les figures à construire, il suffit d'y mettre les points Ω, Ω', en cherchant en même temps, ce que deviennent dans cette hypothèse les points α_1, α_2, α_3, α_4 et les intersections mutuelles des trois plans s, $\overline{\Omega\,\Omega'\alpha_1}$, $\overline{\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4}$, qu'il est nécessaire de connaître dans la construction de M. Chasles. Cette recherche n'offre aucune difficulté; les deux premiers plans se coupent suivant la droite $\overline{a_1\,a'_1}$; l'intersection du premier, et du troisième sera connue quand on en aura deux points; je vais donc montrer comment on peut en obtenir un, et on fera les mêmes constructions pour l'intersection du second et du troisième plan. Le point que je veux avoir est l'intersection de la droite $\overline{\alpha_2\,\alpha_3}$ et du plan s; j'observe pour cela que le point cherché étant la trace de $\overline{\alpha_2\,\alpha_3}$ sur le plan s, est l'intersection des traces $\overline{a_2\,a_3}$, $\overline{a'_2\,a'_3}$, des plans $\Omega\,\alpha_2\,\alpha_3$, $\Omega'\,\alpha_2\,\alpha_3$ qui renferment la droite $\overline{\alpha_2\,\alpha_3}$. Quand on aura trouvé de la sorte deux points de chaque intersection, on opérera comme l'indique M. Chasles dans le Mémoire cité, toutes les figures à construire seront dans le plan s.

La conique ε une fois obtenue, fera connaître les droites L, L' du n.° 8, puis les figures corrélatives cherchées, lorsqu'on se sera donné arbitrairement la droite qui correspond à un point pris à volonté dans l'une ou l'autre figure; ces figures corrélatives serviront ensuite à construire autant de points qu'on le desirera de la surface cherchée. On obtiendrait également tout les points de cette surface, par les intérsections des couples de droites qui joignent les points o, o' à tous les couples de points associés relatifs au point λ.

11.*bis* Pour trouver deux faisceaux corrélatifs, dont les éléments correspondants se coupent sur une surface donnée du second ordre, on pourra employer un moyen plus simple que celui qui vient d'être indiqué. On prendra en effet sur cette surface deux points quelconque o, o', et on fera passer un plan quelconque s par l'intersection des plans tangents en ces points; le plan s coupe la surface suivant une certaine conique ε telle, que les deux faisceaux dont le premier a pour centre le point o, et pour rayons les droites menées de ce point aux différents points a, b, ... etc. du plan s, et dont le second a pour centre le point o', et se compose des plans qui contiennent les polaires A, B, ... etc. des points a, b, ... etc. prises dans la conique ε, répondent à la question.

12. Les considérations précédentes, permettent d'énoncer le théorème suivant, qui exprime la condition que doivent remplir dix points donnés pour se trouver sur une même surface du second ordre:

Pour que dix points appartiennent à une même surface du second ordre, il est nécessaire et suffisant que les seize points, traces des droites qui joignent deux quelconques o, o' des points donnés aux huit autres, soient deux à deux associées dans deux figures corrélatives relativement au point d'intersection de ce plan par la droite $\overline{oo'}$.

13. Avant de poursuivre l'étude générale des surfaces du second ordre, il est indispensable de s'arrêter un instant aux cônes. Si les points o, o' des faisceaux corrélatifs précédemment considérés, viennent à se confondre en un même point γ, la surface ς qu'ils engendrent se réduit à un cône de sommet γ, dont la base est la conique ε (n.° 6) relative aux deux figures F, F', tracées sur un plan quelconque par les faisceaux générateurs du cône. Quand on remplace les figures F, F', par deux figures polaires réciproques relativement à la conique ε, les faisceaux corrélatifs qui ont pour sommet le point γ, se trouvent aussi remplacés par d'autres faisceaux corrélatifs qui ont toujours cependant, le cône γ pour lieu de leurs points doubles, et nous dirons que les éléments correspondants de ces derniers faisceaux sont *conjugués* dans le cône γ.

Les théorèmes suivant sont des conséquences très simples, de cette définition : *Un plan quelconque* ϖ *passant par le sommet* γ, *est le lieu des conjugués harmoniques d'un point fixe* θ *situé à volonté sur sa droite conjuguée* T, *par rapport à tous les couples de points d'intersection du cône avec une sécante mobile pivotant autour du point* θ.

La droite T, *est le lieu des pôles d'une droite fixe* Θ *appartenant au plan* ϖ, *pris part rapport aux sections du cône par les plans qui passent par la droite* Θ.

Si on prend à l'infini le point θ et la droité Θ, les théorèmes précédents s'énoncent comme il suit :

Le lieu des milieux des cordes parallèles à la droite T *est le plan conjugué* ϖ *de cette droite.*

Le lieu des centres des sections faites dans le cône par des plans parallèles au plan ϖ, *est la droite conjuguée* T *de ce plan.*

14. Nous allons établir maintenant une proposition importante qui peut être énoncée comme il suit.

Dans tout cône du second ordre, il y a au moins trois droites réelles, perpendiculaires à leurs plans conjugués.

Les plans conjugués de ces droites nommées *axes* du cône, sont, en vertu du n.° précédent, des plans de symétrie de cette surface. Pour démontrer cette proposition, prenons une droite quelconque T passant par le sommet du cône, son plan conjugué ϖ, et le plan ϖ' mené perpendiculairement à cette droite par le point γ.

La droite ϖ et le plan ϖ' venant à changer arbitrairement, traceront sur un

plan fixe s pris à volonté, un point et une droite, appartenant respectivement à deux figures polaires réciproques, puisque le point en question peut être considéré comme étant le pôle de la droite correspondante, dans le cercle imaginaires ε', qui a pour centre la projection orthogonale du sommet γ sur le plan s, et pour module de son rayon, la hauteur du même point γ au dessus du plan s, (*Géom. Sup. n*.° 784); les figures formées par les traces des plans ϖ, ϖ' sur le plan s étant corrélatives à une même figure, sont par cela même homographiques, et possédent trois droites, sur chacune des quelles, coïncident deux droites homologues; et comme une de ces droites est nécessairement réelle, on pourra dire que le cône a au moins un axe réel. Pour démontrer que les deux autres existent toujours aussi, nommons a_1, le pied de l'axe déjà obtenu, a_2, a_3 ceux des deux autres; les trois points a_1, a_2, a_3 sont ceux qui ont mêmes polaires dans la conique ε et le cercle ε', et les points a_2, a_3 divisent harmoniquement chacun des deux segments interceptés par les courbes ε, ε', sur la polaire du point a_1; cette dernière remarque prouve que le points en question sont nécessairement réels, puisqu'ils divisent harmoniquement à la fois, deux segments dont l'un au moins (celui qui correspond à ε') est imaginaire. (*Géom. Sup. n*.° 255).

Il peut arriver que le cône ait plus de trois axes et cela seulement dans les deux cas suivants: 1.° toutes les droites, qui passent par le sommet du cône, sont des axes; la base du cône se confond alors avec ε'; 2.° il existe une infinité d'axes tous perpendiculaires à l'un d'eux; la base du cône est alors un cercle concentrique à ε', et le cône est de révolution.

On remarquera le premier cas; le cône est coupé en effet par un plan quelconque, suivant un cercle imaginaire dont le centre est la projection du sommet, et dont le rayon a pour module la hauteur de ce même sommet au dessus du plan sécant.

15. Les sections faites dans le cône γ, par des plans de directions diverses, sont des courbes variées dont nous allons déterminer la nature. On observera à cet effet que des plans parallèles donnent des coniques ayant même points à l'infini, et par conséquent homothétiques; si donc on veut connaître à quelle espèce appartient la section faite par un certain plan, on ménera par le sommet γ un plan parallèle au plan proposé, et suivant que les génératrices du cône contenues dans ce plan parallèle seront réelles et distinctes, confondues en une seule, on imaginaires, on aura sur le plan sécant proposé une hyperbole, une parabole ou une ellipse.

Il résulte de ceci, que sur un cône réel, on peut placer toutes les hyperboles dont les asymptotes forment un angle inférieur à l'angle maximum de deux génératrices, toutes les paraboles et toutes les ellipses dont les excentricités sont inférieures à une certaine limite; nous verrons plus loin qui cette limite est zéro.

Si le cône se réduit à deux plans réels, on pourra y placer toutes les hyperboles

qui se réduisent à des systèmes de deux droites; si le cône n'a de réel qu'une droite, intersection des deux plans imaginaires qui le composent, on n'y pourra placer que des ellipses formées de droites imaginaires se coupant en un point réel, et nous verrons, que plusieurs de ces ellipses peuvent être considérées comme des cercles; dans ces deux derniers cas d'ailleurs, les plans parallèles a l'axe principal donneront des cas particuliers de la parabole.

Quand enfin le cône n'a de réel que son sommet, des plans quelconques ne donneront que des ellipses imaginaires, dont quelques unes pourront être des cercles imaginaires.

Pour reconnaître que l'excentricité de la section plane peut s'évanouir, on cherchera à couper le cône suivant un cercle soit réel soit imaginaire; on observera dans ce but que les plans des sections circulaires, nommés plans *cycliques* par M. Chasles, sont parallèles aux plans qui contiennent, outre le sommet du cône, une des cordes communes aux courbes ε, ε' du n.° 14; comme deux seules de ces six cordes sont toujours réelles (*), on trouvera toujours deux directions réelles de plans cycliques. Ces plans dont les directions peuvent se confondre, sont tous parallèles à un même axe, car sur chacun d'eux, un des points qui a même polaire dans les courbes ε, ε' relatives à ce plan, est à l'infini.

16. Revenons maintenant aux surfaces du second ordre distinctes des cônes; on peut les classer très facilement par la considération de leurs points à l'infini. Ces points appartiennent en effet au cône γ auquel se réduit la surface, quand on transporte parallèlement à eux mêmes les faisceaux o, o' du n.° 10, de manière à faire coïncider leurs centres; il en résulte, que *les sections d'une même surface du second ordre par des plans parallèles, sont homothétiques entre elles, ainsi qu'aux sections du cône γ par ces mêmes plans*; et que par suite, *de la forme de ce cône, dépendra celle des sections de la surface par des plans de diverses directions.*

Ce cône γ étant obtenu, quatre cas peuvent se présenter: (n.° 15).

1.° *Il est réel et a pour base une conique autre que l'ensemble de deux droites*; la surface proposée contient alors des hyperboles, des paraboles et des ellipses, on a un *hyperboloïde.*

2.° *Il est réel mais se réduit à deux plans*; les seules courbes que peut contenir la surface sont alors des paraboles et des hyperboles, cette surface est alors un *paraboloïde hyperbolique.*

3.° *Il se réduit à une droite on mieux à deux plans imaginaires contenant cette droite*; on a alors un *paraboloïde elliptique* qui ne peut avoir d'autres sections planes que des ellipses et des paraboles.

(*) Il est aisé de s'en assurer en prenant le plan S perpendiculaire à l'un des axes du cône, ce qui rend la conique ε concentrique au cercle ε'.

4.° *Son sommet seul est réel*; ce cas correspond à *l'ellipsoïde* sur lequel on ne peut placer que des ellipses.

On conclura du précédent n.°, que toutes les surfaces autres que le paraboloïde hyperbolique, possèdent deux directions de plans cycliques, qui se confondent quand le cône γ est de révolution, cas auquel, comme on le verra plus loin, la surface proposée est elle même de révolution; et si ce cône, étant imaginaire, ne pouvait être coupé par des plans quelconques que suivant des cercles (n.° 15), on en dirait autant de la surface qui serait une *sphère*.

§. III. *Des pôles et de leurs plans polaires.*

17. Soit une surface du second ordre ς déterminée par les faisceaux corrélatifs o, o'; soient encore un point fixe p pris à volonté, et une sécante mobile Π passant en ce point; le conjugué harmonique ϖ du point p, par rapport aux points d'intersection de la surface et de la sécante Π, décrit au certain lieu géométrique quand cette sécante pivote autour du point p; c'est ce lieu qui va nous occuper.

Concevons sur la sécante Π, les deux divisions homographiques déjà considérées au n.° 10, et dont les points doubles appartiennent à la surface; le conjugué harmonique du point p par rapport à ces points doubles, ne change pas, quand on remplace ces points doubles par les homologues p', p_1 du point p considéré comme appartenant successivement aux deux divisions (*Géom. Sup.* n.° 267). Or le lieu des points p', p_1 se compose des deux plans qui dans les faisceaux générateurs correspondent aux droites op, $o'p$; *le lieu cherché est donc un certain plan* $\mathfrak{P}$.

On nomme ce plan le *plan polaire* du point p qu'on nomme lui-même *pôle* du plan $\mathfrak{P}$.

18. Nous pouvons déterminer dès à présent, la *classe* des surfaces du second ordre; cette classe en effet, est égale au nombre des plans tangents (réels ou imaginaires) qu'on peut mener par une même droite à l'une de ces surfaces, ou ce qui revient au même, au cône circonscrit qui a pour sommet un point quelconque p de la droite proposée. Ce cône ayant évidemment pour base, la section de la surface par le plan polaire $\mathfrak{P}$ de son sommet, est du second ordre, ce qui permet de dire que *toutes les surfaces du second ordre sont aussi de la deuxième classe.*

19. La définition du plan polaire entraine les théorèmes suivant :

Le plan polaire d'un point quelconque p, contient le pôle de tout plan qui contient lui-même le point p.

Le lieu des pôles d'une droite quelconque $\mathfrak{P}$, *par rapport aux sections de la surface faites par des plans contenant cette droite, est une autre ligne droite, qui est en outre la corde de contact des plans tangents menés à la surface par la droite* $\mathfrak{P}$.

Ces deux droites qui sont dans une parfaite réciprocité, sont celles que M. Poncelet nomme *polaires réciproques.*

La première des propositions précédentes, fournit un moyen pour construire le pôle d'un plan donné; ce pôle s'obtiendra en effet, en prenant l'intersection des plans polaires de trois points quelconques situés sur le plan donné.

Il résulte également de la même proposition, que *les points de l'espace et leurs plans polaires forment deux figures corrélatives ;* on voit aisément en effet que le rapport anharmonique de quatre plans qui passent par un même droite quelconque, est égal à celui de leurs pôles.

Voici encore un théorème utile qui est une conséquence des précedents :

Quand une droite P tourne autour d'un point fixe p , sans quitter un même plan $\mathfrak{Q}$, sa polaire réciproque P' pivote dans le plan polaire $\mathfrak{P}$ du point p, autour d'un point fixe ϖ , pôle de l'intersection mutuelle des plans $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{P}$, par rapport à la section faite dans la surface par le plan $\mathfrak{P}$; et les deux faisceaux formés par les droites P, P' sont homographiques.

20. Si par un certain point p on méne un plan et la droite qui va au pôle de ce plan, ces deux éléments traceront sur le plan polaire du point p deux figur es polaires réciproques dont les points doubles sont sur la surface du second ordre que l'on considère.

Ce point et cette droite qui sont conjugués dans le cône de sommet p circonscrit à la surface (n.° 13), sont dits également *conjugués* dans la surface, relativement au point p.

D'après cette définition, *si par une des droites qui passent par le point p, on méne deux plans dont chacun a son pôle sur l'autre, ils couperont le plan conjugué de la droite en question, suivant deux droites conjuguées dans la conique qui résulte de l'intersection de ce dernier plan et de la surface.*

Le théorème qu'on a démontré au n.° 14 entraine le suivant :

Dans toute surface du second ordre, il y a relativement à un point quelconque, trois droites réelles perpendiculaires à leurs plans conjugués.

On examinera plus loin le cas où le nombre de ces droites est supérieur a trois.

§. IV. *Du centre, des diamètres et des axes.*

21. Les divers théorèmes qui viennent d'être établis, comprennent, comme cas particuliers, toutes les propositions qui concernent les centres, les diamètres et les axes des surfaces du second ordre.

Si le point p du n.° 17 s'éloigné à l'infini, les sécantes qui y passent deviennent parallèles, et le plan $\mathfrak{P}$ coupe en leurs milieux toute les cordes parallèles à la direction dans laquelle le point p s'est enfui; il en résulte que *toutes les surfaces*

diamétrales d'une surface du second ordre se réduisent à des plans; il y a plus, comme tous les plans diamétraux contiennent nécessairement le pôle ω du plan de l'infini, et qu'ils sont respectivement parallèles aux plans diamétraux du cône γ (n.° 13), qui correspondent à des cordes de même direction, on pourra dire, que *dans les ellipsoïdes et les hyperboloïdes, les plans diamétraux passent tous par un même point ω non a l'infini,* centre *de la surface, et que dans les paraboloïdes, les plans diamétraux sont tous parallèles a une même droite.* On voit donc que les ellipsoïdes et les hyperboloïdes sont doués de centre, et que relativement aux paraboloïdes, le plan de l'infini ayant son pôle ω également à l'infini, doit être considéré comme tangent à la surface, puisque les plans tangents sont généralement les seuls qui contiennent leurs pôles.

Du §. III on conclut encore, que *le lieu des centres des sections parallèles d'une surface du second ordre, est une ligne droite passant par le point ω et qu'on nomme diamètre de la surface; et que les cylindres circonscrits ont tous pour bases des sections coniques concentriques avec la surface.*

22. On peut énoncer de la manière suivante, les propriétés reconnues dans le n.° 20 aux droites et plans conjugués relatifs au point ω:

Il y a dans chaque surface à centre, trois axes réels et trois plans de symétrie, tous parallèles à ceux du cône γ; cette surface est de révolution en même temps que le cône γ.

La considération de ce même cône, fait reconnaître que les paraboloïdes ont seulement deux plans de symétrie, excepté quand ils en ont une infinité et qu'ils sont par suite de révolution.

Si, étant donné un plan diamétral, on prend sa droite conjuguée et deux diamètres conjugués de la section qu'il détermine dans la surface, on a trois droites telles, que le plan conjugué de chacune d'elles est celui qui passe par les deux autres (n.° 20).

Quand on a transporté le cône γ parallèlement à lui-même jusqu'à ce que son sommet coïncide avec le centre de la surface, on peut le considérer comme circonscrit, car il coupe le plan de l'infini, qui est le plan polaire de son sommet, suivant la même courbe que la surface. On le nomme alors *cône asymptote*, et il a mêmes axes et plus généralement, mêmes plans diamétraux et diamètres conjugués, que la surface à laquelle il appartient.

23. Avant de passer à d'autres considérations, il est bon de remarquer un moyen simple d'engendrer une surface du second ordre, par l'intersection des éléments correspondants de deux faisceaux corrélatifs. Il suffit en effet de supposer, que les points o, o' du n.° 11bis, sont les extrémités d'un même axe (rien ne s'opposant à que l'une de ces extrémités se trouve à l'infini); que le plan s est perpendiculaire à cet axe,

et que les faisceaux o, o' tracent sur le plan s, deux figures polaires réciproques, par rapport à la section réelle ou imaginaire de la surface coupée par le plan s. La discussion du lieu sera de la sorte extrêmement facile, et si le plan s passe par le centre on écrira de suite l'équation de la surface rapportée à ses axes.

§. V. *Des génératrices rectilignes.*

24. Nous avons vu que le nombre des points d'intersection d'une surface du second ordre par une droite quelconque, ne peut surpasser deux, sans être indéterminé; ce dernier cas correspond à des surfaces sur lesquelles on peut placer des droites, et par suite des sections coniques se réduisant à deux droites; voyons maintenant comment cette particularité peut se présenter.

Si un plan sécant vient à se mouvoir parallèlement à une direction donnée, la section conserve les mêmes point à l'infini, et son centre décrit une ligne droite qui passe par les points de contact des plans tangents à la surface menés parallèlement à la direction donnée. Chacun de ces plans tangents coupe donc la surface suivant une conique qui contient son centre, c'est-à-dire suivant une système de deux droites et on peut énoncer le théorème suivant.

Tout plan tangent à une surface du second ordre, la coupe suivant deux droites, réelles quand le cône γ de cette surface (n.° 16) *coupe le plan tangent suivant une hyperbole ou une parabole, et imaginaires quand ce même cône y trace une ellipse.*

Les droites ainsi obtenues sont les asymptotes de la section du cône asymptote par le plan qui les contient.

Ce théorème et la remarque qui le suit permettent de construire les génératrices rectilignes en un point quelconque d'une surface qui en possède, et de décider si une surface donnée est réglée ou non. Effectivement, les ellipsoïdes et les paraboloïdes elliptiques ne pouvant contenir aucune hyperbole, n'auront pas de génératrices rectilignes, tandis que les paraboloïdes hyperboliques en auront toujours, qui seront toutes parallèles, les unes à l'un des plans auxquels se réduit le cône asymptote (n.° 16), les autres à l'autre plan. Ces deux plans sont les *plans directeurs* du paraboloïde.

Quant à l'hyperboloïde, on observera que les plans menés par le centre d'une semblable surface, parallèlement à ses plans tangents, coupent le cône asymptote suivant des systèmes de deux droites qui sont toutes à la fois, soit réelles, soit imaginaires (*); on aura dans le premier cas deux génératrices rectilignes en chaque point de la surface, tandis qu'on n'en aura jamais dans le second.

(*) Pour s'en convaincre on fera ce raisonnement: il est impossible qu'un hyperboloïde ait un point commun avec son cône asymptote, car si cela était, l'arête du cône menée à ce point, qui a déja deux points à l'infini sur l'hyperboloïde, aurait trois points communs avec la surface, chose qui ne peut arriver;

On trouve ainsi deux sortes d'hyperboloïdes; ceux qui sont réglés, nommés aussi hyperboloïdes *à une nappe*, et ceux qui ne le sont pas, ou hyperboloïdes *à deux nappes*.

25. Si on coupe une même surface réglée du second ordre par des plans tangents menés en deux points différents, on obtiendra deux couples de droites concourantes, qui se rencontrent deux à deux sur l'intersection des plans tangents ; il en résulte, que *les génératrices d'une même surface réglée, se partagent en deux systèmes tels, que les génératrices de l'un rencontrent toutes celles de l'autre, sans rencontrer celles de leur système.* Les deux génératrices d'un même point appartiennent par suite à des systèmes différents.

26. Les génératrices d'une surface réglée du second ordre présentent une propriété remarquable découverte par M. Chasles (*Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite*) et qui consiste en ce que :

Les génératrices d'un même système divisent homographiquement deux génératrices quelconques appartenant à l'autre.

Cette proposition est évidente dans le cas du paraboloïde hyperbolique (n.° 23); les divisions sont même *semblables*, puisqu'elles sont tracées par des droites parallèles à un même plan.

Pour démontrer le théorème sur l'hyperboloïde, je nommerai Γ_1, Γ_2, les génératrices fixes faisant partie d'un même système;

Γ la génératrice mobile de l'autre système; G_1, G_2, G les arêtes du cône asymptote parallèles à ces trois droites;

Les plans $G_1 G$, $G_2 G$, forment évidemment deux faisceaux homographiques, lorsque la génératrice G vient à se mouvoir sur le cône asymptote; donc, les plans $\Gamma_1 \Gamma$, $\Gamma_2 \Gamma$ qui leur sont respectivement parallèles, appartiennent aussi à deux faisceaux homographiques, ce qui entraine la proposition énoncée.

La réciproque de cette proposition, évidente lorsqu'on adopte pour les surfaces du second ordre la définition que nous en avons donnée au §. II, conduit aux théorèmes qui concernent la génération de l'hyperboloïde à une nappe, ou du paraboloïde hyperbolique, par une génératrice rectiligne s'appuyant sur des directrices également rectilignes.

27. On a omis pour simplifier quelques cas particuliers qui peuvent se présenter, mais leur discussion n'offre aucune difficulté. La surface ς du n.° 10 peut se réduire à un cône, à un cylindre ou à l'ensemble de deux plans, et on voit alors comment doivent être modifiés les théorèmes qui ont été démontrés jusqu'à présent.

---

les rayons vecteurs menés du centre aux différents points de la surface sont donc, soit tous à l'extérieur, soit tous à l'intérieur du cône, de sorte que les parallèles aux plans tangents, qui sont dans le cône aussi bien que dans la surface, les plans diamétraux conjugués de ces rayons vecteurs, couperont le cône suivant deux génératrices, réelles dans le premier cas, et imaginaires dans le second.

§. VI. *Autre mode de génération des surfaces du second ordre.*

28. Les surfaces du second ordre ont été considérées jusqu'à présent, comme lieux des points d'intersection des éléments correspondants de deux faisceaux corrélatifs; ces mêmes surfaces peuvent encore être envisagées sous un autre point de vue non moins avantageux, mais dont nous ne développerons pas les conséquences.

Concevons deux figures corrélatives F, F$'$ dont les plans sont distincts; le plan qui passe par un point m de la première, et par la droite corrélative M$'$ de ce point, varie quand le point m se déplace; et il enveloppe une surface que nous allons reconnaître appartenir au second ordre.

On verra par des raisonnements que nous ne pouvons pas faire ici, mais qui sont tout-à-fait semblables à ceux du n.° 10, que la surface enveloppée est de la deuxième classe, et on construira sans peine les plans tangents menés par une droite quelconque, ou le cône circonscrit ayant pour sommet un point donné à volonté. La surface est tangente aux plans F, F$'$ en des points qu'on aperçoit de suite.

Au théorème du n.° 17 correspond celui-ci: *Une droite mobile étant prise à volonté dans dans un plan fixe* $\mathfrak{P}$, *le conjugué harmonique du plan* $\mathfrak{P}$ *par rapport aux plans tangents issus de la droite en question, passe par un point fixe p qui est le pôle du plan* $\mathfrak{P}$.

D'où il résulte par un raisonnement analogue à celui du n.° 18, *que la surface enveloppée par le plan* $\overline{mM'}$ *est du second ordre.*

On en déduit encore le théorème suivant :

Le plan conjugué d'une droite fixe dans un cône circonscrit qui a son sommet sur cette droite, contient la polaire réciproque de la droite considérée.

29. La surface enveloppée par le plan $\overline{mM'}$ du précédent n.°, est du second ordre comme on vient de s'en assurer; mais on peut affirmer de plus, que *les plans tangents à une surface quelconque du second ordre, tracent sur deux plans tangents fixes de cette surface, deux droites associées dans deux figures corrélatives* (n.° 4).

Nommons en effet :

o, o' les centres des faisceaux corrélatifs qui donnent naissance à une surface du second ordre,

ϖ, ϖ' les plans tangents menés en ces points,

k un point quelconque de la surface,

$\mathfrak{K}$ le plan tangent mené en ce point,

M, M$'$ les traces du plan $\mathfrak{K}$ sur les plans ϖ, ϖ',

x_1, x_2 les traces des droites O$'k$, Ok sur les plans ϖ, ϖ';

le point x_1 correspond anharmoniquement à la droite M$'$, car la droite $o'x_1$ étant la polaire réciproque de la droite M$'$, le point x_1 décrit une droite quand M$'$ enve-

loppe un point, et trace sur cette droite, un faisceau homographique au faisceau engendré par la droite M' (n.° 19); le point x_2 correspond de la même manière à la droite M, et par suite, les droites M, M' sont associées puisque les points x_1, x_2 le sont eux-mêmes (n.° 4).

30. Une méthode semblable a celle du n.° 11, permet de résoudre le problème qui consiste, à *construire la surface du second ordre tangente à neuf plans donnés;* on énoncera comme il suit la relation qui existe entre dix plans tangents d'une même surface du second ordre : *huit de ces plans tracent sur les deux autres, huit couples de droites associées dans deux figures corrélatives.*

Les principes contenus dans ce paragraphe seront, ainsi que les autres, employés avantageusement dans les diverses questions relatives aux surfaces du second ordre.

§. VII. *Propriétés relatives aux systèmes de plusieurs surfaces du second ordre.*

31. Les points communs à deux surfaces du second ordre sont situés sur une courbe qui est ordinairement à double courbure, et qu'un plan quelconque ne peut généralement couper en plus de quatre points; cette courbe est déterminée quand on en connait huit points, car avec deux autres points pris à volonté on déterminera deux surfaces du second ordre passant par ces huit points, et leur intersection sera la courbe θ.

L'enveloppe des plans tangents communs à ces deux mêmes surfaces, est une surface développable Θ, à laquelle on ne peut mener plus de quatre plans tangents par un même point; huit plans suffisent pour déterminer cette surface développable.

Cela posé, on démontre aisément les deux propositions suivantes :

Une système de surfaces du second ordre ayant en commun huit points (ou ce qui revient au même une courbe θ), détermine sur une transversale rectiligne quelconque, deux divisions homographiques en involution.

Les plans tangents menés par une même droite à des surfaces du second ordre inscrites dans la même surface Θ, forment deux faisceaux homographiques en involution.

32. Ces théorèmes conduisent aux solutions des questions suivantes qui se présentent quelquefois :

1.° *Construire une surface du second ordre contenant une courbe θ et tangente à un plan donné.*

2.° *Construire une surface du second ordre circonscrite à une surface Θ et passant par un point donné.*

On trouvera comme il suit dans le premier problème, le point de contact de la surface demandée avec le plan qu'elle doit toucher; par la courbe θ, on fera passer

deux surfaces du second ordre qui traceront sur le plan donné deux certaines sections coniques, et l'un quelconque des trois points qui ont même polaire dans ces deux courbes, pourra servir de point de contact. Il y a ainsi trois solutions dont l'une au moins donne toujours une surface réelle. Il est bon d'observer que les diagonales du quadrilatère inscrit aux sections coniques sont des génératrices rectilignes des trois surfaces.

La seconde question, qui trouvera plus loin une application importante, a également trois solutions que l'on obtiendra en suivant une marche semblable.

33. Les surfaces du second ordre qui ont en commun une courbe θ, ou une surface Θ, jouissent encore de cette propriété extrêmement remarquable :

Il y a quatre points dont chacun a même plan polaire relativement à toutes les surfaces.

Le 1[er] théorème du n.° 31 permet de borner la démonstration au cas ou les surfaces proposées sont seulement au nombre de deux; c'est dans cette hypothèse que nous nous placerons pour démontrer cette proposition découverte par M. Poncelet (Voir la fin du *Traité des propriétés projectives des figures*). Considérons donc deux surfaces quelconques du second ordre, et les plans polaires d'un même point par rapport à l'une et à l'autre; le point venant à se déplacer, ces plans forment deux figures homographiques, puisque d'après le n.° 19 ils sont les éléments corrélatifs d'un même point; le théorème de M. Poncelet entraine donc celui-ci et réciproquement.

Dans deux figures homographiques, il y a quatre plans sur chacun des quels, deux points homologues se confondent. Pour démontrer cette dernière proposition, prenons dans les deux figures, deux droites homologues M, M'; les plans homologues qui contiennent respectivement ces droites, se coupent suivant les génératrices rectilignes d'un hyperboloïde à une nappe, dont chaque point α jouit évidemment de la propriété d'avoir son homologue α', sur le plan αM'; prenons encore deux droites homologues N, N', rencontrant respectivement les premières, et construisons l'hyperboloïde engendré par l'intersection de deux plans homologues variables, mais ne cessant jamais de passer par les droites N, N'; deux droites homologues P, P' rencontrant respectivement les premières, donnent encore naissance à un troisième hyperboloïde dont les points ainsi que ceux du second jouissent de la proprieté reconnue à ceux du premier. Ces trois surfaces qui jouissent évidemment de la propriété de contenir tout point qui est lui même son homologue, se coupent en huit points; deux de ces points se trouvent sur l'intersection des plans MN, M'N', deux autres sur l'intersection des plans MP, M'P' et chacun des quatre points qui restent, coïncide avec son homologue; car si α est un de ces points, son homologue se trouve contenu à la fois sur chacun des plans αM', αN', αP', c'est-à-dire en α même. Les quatre points mis de côté ne conviennent évidemment pas, et ceux qui ont été conservés pris trois à trois déterminent les quatre plans jouissant des propriétés annoncées.

34. Ce théorème est l'un des plus utiles que l'on commaisse sur les surfaces du second ordre, les exemples suivants font apprécier son importance.

Concevons deux surfaces du second ordre et la courbe θ qui leur est commune; si par un point α qui a même plan polaire, et par la courbe θ, nous faisons passer une troisième surface, nous obtiendrons un cône ayant α pour sommet; car le plan polaire du point α par rapport à cette troisième surface étant le même que par rapport aux proposées, ne passe pas par ce point, ce qui aurait nécessairement lieu si cette troisième surface n'était pas un cône de sommet α; on a donc cette proposition:

Par toute courbe θ on peut faire passer quatre cônes du second degré, et par suite les suivantes:

Si deux surfaces du second ordre ont un plan diamétral commun, la projection de leur intersection faite sur ce plan, par des parallèles aux cordes qu'il divise en deux parties égales, est une section conique.

Si deux surfaces du second ordre se coupent suivant une courbe plane, elles contiennent chacune encore une autre courbe plane; car alors, l'un des cônes qui passent par la courbe θ contenant tous les points d'un plan, contient nécessairement aussi tous ceux d'un autre.

On déduira encore du théorème de M. Poncelet les propositions suivantes:

Étant donné deux surfaces du second ordre, quatre sections coniques peuvent être placées sur la surface Θ qui les circonscrit toutes deux.

Si deux surfaces du second ordre sont circonscrites à un même cône, elles le sont encore à un autre cône.

On remarquera combien les propositions contenues dans ce paragraphe, présentent d'analogie avec celles qu'on peut établir, sur les quadrilatères inscrits et circonscrits aux sections coniques.

§. VIII. *Des lignes focales et des surfaces homofocales.*

34.[bis] L'exposition des principales propriétés des lignes focales terminera ce travail; on va voir qu'elles sont toutes des conséquences très simples des principes précédemment établis.

Concevons une surface du second ordre S circonscrite à une des surfaces développables désignée par Θ dans le paragraphe précédent, et d'un point arbitraire m pris pour sommet, menons le cône circonscrit à la surface S et ceux qui ont pour base les 4 sections coniques S_1, S_2, S_3, S_4, qui peuvent d'après le n.° 34 être placées sur la surface Θ. Les cinq cônes ainsi obtenus ayant quatre plans circonscrits communs (*), on peut trouver une droite E dont les plans conjugués dans tous les

(*) On entend ici par *plans circonscrits* à un cône, ceux qui lui sont tangents tout le long d'une génératrice; le nom de plan tangent pouvant être appliqué indistinctement à tous les plans qui passent par le sommet.

cônes et même dans la surface se confondent; la droite E et son plan conjugué que nous désignerons à l'aide de la lettre $\mathcal{E}$ tracent sur un quelconque des plans S_1, S_2, S_3, S_4, un point et une droite faisant partie de deux figures polaires réciproques. Sur le plan S_1, par exemple, on a une droite qui est la polaire du point correspondant, par rapport à la conique S_1; une des coniques S_1, S_2, S_3, S_4, jointe à la surface, suffit d'ailleurs pour déterminer en chaque point de l'espace, les éléments E $\mathcal{E}$, nous sommes donc conduits au théorème suivant :

Si relativement à chaque point de l'espace, il existe une droite E *et un plan* $\mathcal{E}$, *conjugués par rapport à la surface S, et qui tracent sur un plan fixe deux figures polaires réciproques, ils détermineront encore de semblables figures sur trois certains plans fixes distincts du premier.*

Ces plans sont aussi ceux, qui passant par le pôle du plan fixe donné, sont conjugués deux à deux relativement à la surface S, et tracent sur le plan fixe, trois droites également conjuguées deux à deux par rapport à la section conique S_1, lieu des points doubles des figures corrélatives qui existent sur ce plan.

35. Rien n'empêche d'appliquer ce théorème aux droites E, et aux plans $\mathcal{E}$, qui en chaque point de l'espace, sont perpendiculaires et conjugués (n.° 20); car ces plans et ces droites tracent sur le plan de l'infini, deux figures polaires réciproques, qui ont leurs points doubles sur le cercle imaginaire qu'une sphère quelconque détermine sur le plan de l'infini; les plans S_2, S_3, S_4, se confondent alors avec les plans principaux de la surface, d'où le théorème suivant :

Si par chaque point de l'espace, on méne un plan et une droite rectangulaires et conjugués par rapport à une même surface du second ordre, ce plan et cette droite tracent sur chacun des plans principaux de la surface deux figures polaires réciproques.

Les coniques lieux des points doubles de ces figures, ont reçu le nom de *lignes focales*; il y en a une sur chaque plan principal.

Les lignes focales peuvent être considérées comme étant les sections coniques que l'on peut placer sur la surface Θ circonscrite à la fois, à la surface proposée et au cercle imaginaire.

36. On peut maintenant résoudre la question suivante :

Étant donné un plan $\mathfrak{P}$, *trouver une droite qui lui soit perpendiculaire et conjuguée.*

On cherchera l'intersection Π du plan donné avec un des plans principaux, et du pôle de cette droite, par rapport à la focale, on abaissera une perpendiculaire sur le plan $\mathfrak{P}$; cette perpendiculaire est précisément la droite cherchée.

Si la droite Π venait à être tangente à la focale, la droite cherchée passérait, quelque soit le plan donné, par le point de contact et on aurait une infinité de solutions; d'où le théorème suivant:

En chaque point d'une focale, il y a une infinité de plans perpendiculaires à leurs droites conjuguées; tous ces plans contiennent la tangente à la focale.

Il revient encore au même de dire, *que les focales d'une surface du second ordre, constituent le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à cette surface et l'enveloppe des axes principaux de ces cônes.*

Quand un plan sécant $\mathcal{Q}$ est normal à une focale en un point m, la section de la surface par ce plan a le point m pour foyer; cela résulte de ce que les couples de plans qui passent par la tangente à la focale menée au point m, et dont chacun contient le pôle de l'autre, tracent sur le plan $\mathcal{Q}$ deux droites Q, Q', conjuguées par rapport à la courbe d'intersection (n.° 20), et rectangulaires (n.° 36).

37. On peut maintenant construire les focales; chacune de ces courbes a visiblement même centre et mêmes axes que la section principale contenue dans son plan; elle a pour sommets les foyers des sections principales dont les plans sont perpendiculaires au sien, et pour foyers les sommets des deux autres focales.

On reconnaitra ainsi que les surfaces à centre ont deux focales réelles, l'une elliptique, l'autre hyperbolique, qui dans les cônes se réduisent au sommet et à deux droites; les focales réelles des paroboloïdes sont d'ailleurs deux paraboles.

38. Les propriétés des surfaces *homofocales*, c'est-à-dire ayant mêmes lignes focales, se tirent des considérations exposées aux n.° 31 et suivants; ces surfaces sont en effet circonscrites à une même surface développable Θ.

Ainsi :

Les surfaces homofocales ont mêmes axes et mêmes plans principaux (33).

Les plans tangents menés à des surfaces homofocales par une même droite, forment deux faisceaux homographiques en involution (31).

Les cônes de même sommet circonscrits à des surfaces homofocales, peuvent être considérés comme circonscrits en même temps à quatre mêmes plans (*).

Le problème qui consiste à *construire une surface homofocale à une surface donnée et passant par un point donné m,* n'offre pas de difficulté; la surface donnée et la surface cherchée peuvent en effet être considérées, comme circonscrites à une même surface développable Θ contenant le cerle imaginaire à l'infini (n.° 35). Il faut dès lors, concevoir au point m comme sommet, le cône circonscrit à la surface proposée et celui qui a pour base le cercle imaginaire, puis prendre les trois plans dont les droites conjuguées prises dans ces cônes de confondent; ces plans, qui sont évidemment les plans principaux du cône circonscrit, sont tangents aux surfaces qui répondent à la question et qui sont maintenant faciles à construire. Il y a ainsi trois so-

(*) Ces plans sont imaginaires et tracent sur le plan de l'infini, des tangentes au cercle imaginaire du n.° 35.

lutions correspondant à trois surfaces, qui ont pour normales au point m, les axes du cône circonscrit à la surface proposée.

Les surfaces homofocales se coupent donc orthogonalement, lorsqu'elles ont des points communs.

Les intersections mutuelles de ces surfaces sont, comme on le sait, leurs lignes de courbure, et comme les points qui ont même plan polaire dans toutes les surfaces, sont ici leur centre commun, et les points situés à l'infini sur leurs trois axes communs, on pourra dire (n.° 34) : que *les lignes de courbure d'un nombre quelconque de surfaces homofocales, sont situées sur des cônes du second ordre ayant pour sommet commun le centre de ces surfaces*, et que *les projections orthogonales de ces lignes de courbure sur les plans principaux des surfaces que les contiennent, sont des sections coniques.*

39. On vient de voir que les cônes de même sommet a, circonscrits à des surfaces homofocales, sont tous inscrits dans quatre mêmes plans, on peut dire, qu' *ils ont aussi même lignes focales et par suite mêmes axes.* Ces quatre plans dans lesquels ils sont inscrits, constituent en effet comme on l'a vu, une surface développable Θ circonscrite au cercle imaginaire à l'infini du n.° 35. Les lignes focales que nos cônes ont en commun, sont en outre les génératrices rectilignes des trois surfaces homofocales aux surfaces proposées, qu'on peut faire passer par le point a; on s'en assure en observant, que ces lignes focales sont les trois couples d'intersection des quatre plans imaginaires dont on vient de parler, et que ces plans étant tangents aux trois surfaces qui passent par le point a, se coupent deux à deux suivant des génératrices rectilignes de ces surfaces.

Les cônes de même sommet circonscrits à des surfaces homofocales, étant homofocaux ainsi que ceux qui ont pour bases les focales des surfaces proposées, se coupent orthogonalement; on peut énoncer cette propriété en disant, que *les contours apparents de plusieurs surfaces homofocales vues d'un même point, paraissent se couper à angle droit, ainsi que leurs focales communes.*



RIVISTA BIBLIOGRAFICA

FORMOLE PER DETERMINARE QUANTI SIANO I NUMERI PRIMI FINO AD UN DATO LIMITE.

(Riemann, Bericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, November 1859).

1. Indichi $Z(s)$ la somma $\sum \frac{1}{n^s}$ dove si sostituiscano per n tutti i numeri interi, e si assegni ad s un valore immaginario $\alpha + \beta i$ con $\alpha > 1$: si avrà secondo un'osservazione d'Eulero

$$Z(s) = \Pi \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

supponendo che per formar questo prodotto si pongano in luogo di p tutti i numeri primi > 1 : quindi

$$\log Z(s) = -\sum \log(1 - p^{-s}) = \sum p^{-s} + \frac{1}{2}\sum p^{-2s} + \frac{1}{3}\sum p^{-3s} + \cdots$$

Ma generalmente

$$p^{-ms} = s\int_{p^m}^{\infty} x^{-s-1}\, dx = s\int_{1}^{\infty} \varepsilon_p\,(x^{\frac{1}{m}})x^{-s-1}\, dx,$$

se denotiamo con $\varepsilon_p(z)$ un fattore discontinuo, nullo finchè $z < p$, e uguale ad 1 quando z eguaglia o supera p : quindi

$$\sum p^{-ms} = s\int_{1}^{\infty} F\,(x^{\frac{1}{m}})x^{-s-1}\, dx$$

se $F(x^{\frac{1}{m}})$ sia un numero composto di tante unità quanti sono i numeri primi p non superiori ad $x^{\frac{1}{m}}$; e finalmente

(1) $$\frac{\log Z(s)}{s} = \int_{1}^{\infty} f(x)x^{-s-1}\, dx\ ,$$

fatto

(2) $$f(x) = F(x) + \frac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}}) + \ldots$$

Per dedurre il valore di $f(x)$ dall' equazione (1) il Signor Riemann si vale del teorema di Fourier che può applicarsi ad ogni equazione

$$g(\beta) = \int_0^\infty h(v)\, e^{-\beta v i}\, dv$$

tra due funzioni h e g: imperocchè supposto $h(v)$ reale, e u una quantità positiva, se si moltiplicano i due membri per $e^{\beta u i}\, d\beta$ e s'integrano da $\beta = -\infty$ a $\beta = \infty$ si otterrà

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\beta) e^{\beta u i}\, d\beta = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int_0^\infty h(v)\, e^{(u-v)\beta i}\, dv = 2\pi h(u).$$

Preso dunque

$$e^v = x\,, \quad h(v) = f(x) x^{-\alpha},$$

e ricordato il valore $s = \alpha + \beta i$, facendo $e^u = y$, si avrà

$$g(\beta) = \frac{\log Z(s)}{s}\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log Z(s)}{s}\, y^{\beta i}\, d\beta = 2\pi f(y)\,.\, y^{-\alpha}\,,$$

onde

(3) $$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log Z(s)}{s}\, y^s\, d\beta\,,$$

ovvero, integrando per parti,

(4) $$f(y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\log y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,\frac{\log Z(s)}{s}}{ds}\, y^s\, d\beta\,,$$

e y sarà qui un numero qualsivoglia maggiore di 1.

È da notarsi che quando per un determinato valore di u la funzione $h(u)$ divien discontinua, la formola di Fourier esprime la media $\frac{h(u-\omega) + h(u+\omega)}{2}$ fra i due valori discontinui, che assume la funzione h in prossimità di quel salto. Quindi essendo la funzione $F(z)$, da cui dipende $f(y)$, discontinua per ogni valore di z che uguagli un numero primo, le formole (3) e (4) non sarebbero applicabili a tali valori, ma si renderanno generali supponendo che il valore di $F(z)$, con cui si forma quello di $f(y)$ mediante la equazione (2), sia scemato di mezza unità ogniqualvolta z divenga eguale ad un numero primo.

2. Il signor Riemann trasforma la funzione $Z(s)$ con un integrale definito mediante la formola

$$\int_0^\infty e^{-n^2\pi x}\, x^{\frac{s}{2}-1} dx = \frac{1}{n^s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}}$$

da cui si trae

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\,Z(s)=\int_0^\infty \psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}\,dx\,,$$

fatto

$$\sum_1^\infty e^{-n^2\pi x}=\psi(x)\,.$$

Ma per un teorema di Cauchy (*) abbiamo

$$1+2e^{-a}+2e^{-4a}+2e^{-9a}+\ldots=\sqrt[4]{\frac{b}{a}}\left(1+2e^{-b}+2e^{-4b}+2e^{-9b}+\ldots\right)$$

ove $ab=\pi^2$, e quindi

$$2\psi(x)+1=x^{-\frac{1}{2}}\left[2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right],$$

$$\int_0^1 \psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}\,dx=\int_0^1 \psi\left(\frac{1}{x}\right)x^{\frac{s-3}{2}}\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^{-\frac{1}{2}}-1\right)x^{\frac{s}{2}-1}\,dx=\int_1^\infty \psi(x)x^{-\frac{s+1}{2}}\,dx+\frac{1}{s(s-1)}\cdot$$

Dunque

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}Z(s)=\int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{s+1}{2}}\right)dx+\frac{1}{s(s-1)}\cdot$$

Posto $s=\frac{1}{2}+ti$, e

(5) $$\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}Z(s)=\xi(t)\,,$$

ne seguirà

(6) $$\xi(t)=\frac{1}{2}-\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x)x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}\,t\log x\right)dx\,:$$

si ha pure, integrando per parti

$$\int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{s+1}{2}}\right)dx=\frac{2\psi(1)}{s(s-1)}-\int_1^\infty \psi'(x)\left(\frac{2}{s}x^{\frac{s}{2}}-\frac{2}{s-1}x^{-\frac{s-1}{2}}\right)dx$$

$$=\frac{2}{s(s-1)}\left[\psi(1)+4\psi'(1)+2\int_1^\infty \frac{d.x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)}{dx}\left(x^{\frac{s-1}{2}}+x^{-\frac{s}{2}}\right)dx\right],$$

e per essere

$$2\psi'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\left[2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right]-2x^{-\frac{5}{2}}\psi'\left(\frac{1}{x}\right),$$

(*) V. *Mémoires de l'Institut*, tom. XVII, pag. 607—609.

e quindi

$$\psi(1)+4\psi'(1)=-\frac{1}{2},$$

se ne deduce

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}Z(s)=\frac{4}{s(s-1)}\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}.x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)}{\mathrm{d}x}\left(x^{\frac{s-1}{2}}+x^{-\frac{s}{2}}\right)\mathrm{d}x\,,$$

ossia

$$(7)\qquad \xi(t)=4\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}\,x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)}{\mathrm{d}x}\,x^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}\,t\log x\right)\mathrm{d}x\,.$$

La funzione $\xi(t)$ si può considerare come generalmente definita dall'equazione (7), talchè sarà finita per tutti i valori finiti di t, non cambierà pel cambiamento di t in $-t$, e si svolgerà come $\cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right)$ in una serie convergente secondo le potenze ascendenti di t^2: pei valori di s la cui parte reale sia maggiore di 1 essa dovrà soddisfare all'equazione (5), e quindi il suo logaritmo avrà un valore finito. Da ciò segue che $\xi(t)$ non può annullarsi finchè il coefficiente di i nel valore di t è compreso fra $-\frac{1}{2}$ e $-\infty$, oppure fra $\frac{1}{2}$ e $+\infty$ per essere $\xi(-t)=\xi(t)$; laonde ogni radice ρ dell'equazione $\xi(\rho)=0$ o sarà reale o avrà una parte immaginaria compresa fra $\frac{1}{2}i$ e $-\frac{1}{2}i$. Ordinando queste radici, in guisa che i loro moduli formino una serie crescente, si potrà (*) risolvere $\xi(t)$ in fattori $1-\frac{t^2}{\rho^2}$, e si avrà

$$\xi(t)=\xi(0)\,\Pi\left(1-\frac{t^2}{\rho^2}\right),$$

ossia

$$(8)\qquad \log\xi(t)=\sum\log\left(1-\frac{t^2}{\rho^2}\right)+\log\xi(0)\,.$$

Si ha eziandio

$$\Gamma(a)=\lim.\frac{1.\,2.\,3.\ldots m\,.\,m^{a-1}}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+m-1)}\quad\text{per}\quad m=\infty\,,$$

e quindi

$$(9)\qquad -\log\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)=\lim\left[\sum_{n=1}^{n=m}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)-\frac{s}{2}\log m\right]\quad\text{per}\quad m=\infty\,.$$

3. Dalle equazioni (5), (8), (9) si trae

(*) V. Briot e Bouquet, *Théorie des fonctions doublement périodiques*, pag. 135—140.

$$\frac{\mathrm{d}.\,\dfrac{\log Z(s)}{s}}{\mathrm{d}s} = \sum\nolimits_\rho \frac{\mathrm{d}.\,\dfrac{1}{s}\log\left(1+\dfrac{(s-\frac{1}{2})^2}{\rho^2}\right)}{\mathrm{d}s}$$

$$-\frac{1}{s^2}\log\xi(0) - \frac{\mathrm{d}.\,\dfrac{\log(s-1)}{s}}{\mathrm{d}s} + \sum_1^\infty \frac{\mathrm{d}.\,\dfrac{1}{s}\log\left(1+\dfrac{s}{2n}\right)}{\mathrm{d}s}\,;$$

quindi sostituendo nell'equazione (4), cambiando y in x, e adoperando l'integrazione per parti si otterrà

$$2\pi f(x) = \sum\nolimits_\rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s}\log\left(1+\frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\rho^2}\right)x^s\,\mathrm{d}\beta$$

$$+\log\xi(0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^s\mathrm{d}\beta}{s^2\log x} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log(s-1)}{s}\,x^s\,\mathrm{d}\beta + \sum_1^\infty \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)x^s\,\mathrm{d}\beta.$$

Ma si ha generalmente, se a, b, k siano quantità positive (*),

$$(10)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{k(b+\beta i)}\,\mathrm{d}\beta}{(b+\beta i)^a} = \frac{2\pi}{\Gamma(a)}\,k^{a-1}\,,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-k(b+\beta i)}\,\mathrm{d}\beta}{(b+\beta i)^a} = 0\,,$$

onde

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^s\,\mathrm{d}\beta}{s^2} = 2\pi\log x\,;$$

di più

$$\int_\lambda^\infty\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} - \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda+s}\right) = \log\left(1+\frac{s}{\lambda}\right),$$

supposto $\lambda > 0$, e quindi

$$\int_\lambda^\infty \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda(\lambda+s)} = \frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{\lambda}\right)\,,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{\lambda}\right)x^s\,\mathrm{d}\beta = \int_\lambda^\infty \mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^s\,\mathrm{d}\beta}{\lambda(\lambda+s)} = 2\pi\int_\lambda^\infty\frac{x^{-\lambda}\,\mathrm{d}\lambda}{\lambda}$$

poichè la stessa formola (10) somministra

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^s\,\mathrm{d}\beta}{\lambda+s} = 2\pi x^{-\lambda}\,;$$

d'altra parte

$$\frac{x^{-\lambda}}{\lambda} = \int_x^\infty x^{-\lambda-1}\,\mathrm{d}x\,,$$

(*) Cauchy, *Mémoires sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*, pag. 34 e 36.

talchè

$$\int_\lambda^\infty \frac{x^{-\lambda}\,\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = \int_\lambda^\infty \mathrm{d}\lambda \int_x^\infty x^{-\lambda-1}\,\mathrm{d}x = \int_x^\infty \frac{x^{-\lambda-1}}{\log x}\,\mathrm{d}x\,,$$

e però

$$\sum_1^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)x^s\,\mathrm{d}\beta = 2\pi\sum_1^\infty \int_x^\infty \frac{x^{-2n-1}\,\mathrm{d}x}{\log x} = 2\pi\int_x^\infty \frac{1}{x^2-1}\,\frac{\mathrm{d}x}{x\log x}\,.$$

Inoltre differenziando rispetto ad a la prima delle formole (10) si trova

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{k(b+\beta i)}}{(b+\beta i)^a}\log(b+\beta i)\mathrm{d}\beta = -\frac{2\pi}{\Gamma(a)}\left(\log k - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}\right)k^{a-1}\,,$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{k(b+\beta i)}}{b+\beta i}\log(b+\beta i)\mathrm{d}\beta = -2\pi(\log k + \mathrm{C})\,,$$

indicata con C la nota costante Mascheroniana $= -\Gamma'(1)$. Avendosi pure

$$\log(s-1) = \log s - \frac{1}{s} - \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{3s^2} - \ldots\,,$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^s\,\mathrm{d}\beta}{s^a} = \frac{2\pi}{\Gamma(a)}k^{a-1}$$

ove $k = \log x$, ne risulta

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\log(s-1)}{s}x^s\,\mathrm{d}\beta = -2\pi\left[\log k + \mathrm{C} + k + \frac{1}{1.2}\frac{k^2}{2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{k^3}{3} + \ldots\right],$$

e la serie qui compresa rappresenta il *logaritmo integrale* $\mathrm{L}i(x)$.

Finalmente abbiamo

$$\log\left(1+\frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\rho^2}\right) = \log\,(s-\tfrac{1}{2}-\rho i) + \log\,(s-\tfrac{1}{2}+\rho i) - \log.\,\rho^2$$

e fatto $\frac{1}{2} \pm \rho i = \lambda$, abbiamo altresì

$$\log\,(s-\lambda) = \log s - \int_0^\infty \frac{e^{-(s-\lambda)v} - e^{-sv}}{v}\,\mathrm{d}v\,,$$

onde

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{s}\log\,(s-\lambda)x^s\mathrm{d}\beta = -2\pi\,(\log k + \mathrm{C}) - \int_0^\infty \mathrm{d}v \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\lambda v}-1}{v}\cdot\frac{1}{s}\,e^{(k-v)s}\,\mathrm{d}\beta,$$

ritenuto $k = \log x$. Ora per la seconda delle formole (10) l'integrale $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{s}\,e^{(k-v)s}\,\mathrm{d}\beta$

è nullo quando $v > k$, e per la seconda uguaglia 2π quando $v < k$: dunque ridurremo v ai limiti 0 e k e otterremo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s} \log(s - \lambda) x^s \, d\beta = -2\pi\left(\log k + C + \int_0^k \frac{e^{\lambda v} - 1}{v} dv\right)$$

$$= 2\pi \log \lambda - 2\pi\left[\log \lambda k + C + \lambda k + \frac{1}{1.2}\frac{\lambda^2 k^2}{2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{\lambda^3 k^3}{3} + \ldots\right]$$

$$= 2\pi[\log \lambda - Li(x^\lambda)],$$

cosicchè sarà

$$\sum_\rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s} \log\left(1 + \frac{(s - \frac{1}{2})^2}{\rho^2}\right) x^s \, d\beta = 2\pi \sum_\rho \left[\log(\tfrac{1}{2} + \rho i) + \log(\tfrac{1}{2} - \rho i) - \log.\rho^2\right]$$

$$- 2\pi \sum_\rho \left[Li(x^{\frac{1}{2} + \rho i}) + Li(x^{\frac{1}{2} - \rho i})\right],$$

e per le equazioni (6) e (8) si avrà

$$\sum \left[\log(\tfrac{1}{2} + \rho i) + \log(\tfrac{1}{2} - \rho i) - \log.\rho^2\right]$$

$$= \sum \log\left(1 + \frac{1}{4\rho^2}\right) = \log \xi(\tfrac{1}{2} i) - \log \xi(0) = \log \tfrac{1}{2} - \log \xi(0).$$

Adunque sostituendo tutte le espressioni trovate si conchiuderà

$$(11) \qquad f(x) = Li(x) - \sum_\rho \left[Li(x^{\frac{1}{2} + \rho i}) + Li(x^{\frac{1}{2} - \rho i})\right] + \int_x^{\infty} \frac{1}{x^2 - 1} \frac{dx}{x \log x} - \log 2.$$

Questa formola differisce da quella del Sig. Riemann nell'ultimo termine che per esso è $+ \log \xi(0)$ in luogo di $- \log 2$: in ordine alla quale diversità mi rimetto pienamente al suo giudizio.

4. Dalla formola (2) si deduce la reciproca

$$(12) \qquad F(x) = \sum (-1)^\mu \frac{1}{m} f(x^{\frac{1}{m}}),$$

in cui per m si debbono sostituire successivamente tutti i numeri interi non divisibili per alcun quadrato maggiore di 1, e dove μ dinota il numero dei divisori primi di m. Per dimostrarla basta mettere invece di $\frac{1}{m} f(x^{\frac{1}{m}})$ la somma

$$\frac{1}{m} F(x^{\frac{1}{m}}) + \frac{1}{2m} F(x^{\frac{1}{2m}}) + \frac{1}{3m} F(x^{\frac{1}{3m}}) + \text{ecc.}$$

che è data dall'equazione (2), e riconoscere che allora nel secondo membro tutti i

termini si distruggono eccetto $F(x)$, poichè ogni altro termine $\frac{1}{n} F(x^{\frac{1}{n}})$, se n abbia ν divisori primi diversi $a, b, c, \ldots$, s'incontrerà una volta col segno + prendendo $m = 1$; ν volte col segno — prendendo $m = a$, $m = b$, $m = c$, ...; $\frac{\nu(\nu - 1)}{1.2}$ volte col segno + prendendo $m = ab$, $m = ac$, $m = bc$, ..., e così in progresso, onde si troverà moltiplicato per

$$1 - \nu + \frac{\nu(\nu - 1)}{1.2} - \frac{\nu(\nu - 1)(\nu - 2)}{1.2.3} + \ldots = 0.$$

Col mezzo delle due formole (11) e (12) si avrà $F(x)$ espresso per x.

Il Sig. Riemann terminando ricorda i confronti istituiti da Gauss e Goldschmidt tra $F(x)$ e $Li(x)$. Legendre diede (*) la formola d'approssimazione $F(x) = \frac{x}{\log x - c}$ con $c = 1,08366$; Dirichlet annunziò (*Crelle*, tom. XVIII, pag. 271-272) d'averla dimostrata in una Memoria letta all'Accademia di Berlino, ma nessuna menzione ne fa il sunto pubblicato nel *Bericht* del febbraio 1838. Il Signor Drach (*Philosoph. Magazine*, 1844, Vol. XXIV, pag. 192-193) crede più vantaggioso prendere

$$c = \log\left(\frac{5}{3}\sqrt{\pi}\right) = 1,0831904,$$

e fatto $F(x) = y$ mette l'equazione di Legendre sotto la forma

$$xe^{-\frac{x}{y}} = \frac{10}{3} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \left(3 + \frac{1}{3}\right) \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt.$$

Infine il Signor Tchebichef (*Giornale del Liouville*, tom. XVIII, pag. 341-365; 1852) reputa più conveniente il valor semplicissimo $c = 1$, ma preferisce come espressione approssimata di $F(x)$ l'integrale $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$ che corrisponde alla differenza $Li(x) - Li(2)$.

A. Genocchi.

(*) *Théorie des Nombres*, tom. II, pag. 65—70.



LETTERA DEL PROF. GIUSTO BELLAVITIS AL PROF. BARNABA TORTOLINI.

Chiarissimo Professore

Padova il 22 Marzo 1860.

Nelle Matematiche, al cui progresso alacremente contribuiscono i dotti di tutta l'Europa e di parte dell'America non si può sempre fermarsi ad indicare coloro che precedentemente trattarono egual argomento; e ripetere cose altre volte pubblicate, anzichè un male è una necessità per tener viva la scienza, la quale non può cercarsi nelle opere generali pur troppo mancanti alle matematiche, bensì nei giornali e nelle opere speciali, che continuamente presentano agli studiosi questa scienza quant' altra mai estesissima. Nulladimano se in giornale italiano si pubblica da dotti stranieri alcuna cosa già conosciuta in Italia, credo non sia da riguardarsi come affatto inopportuno il farne qualche cenno: perciò io vi prego, Chiarissimo Collega, di accordare un cantuccio alle seguenti osservazioni.

Nella pag. 163 (Vol. II) di questi Annali il Sig. Hirst attribuisce a M. Stubbs (*Phil. Magaz. London, nov.* 1843, XXIII. pag. 338) la prima idea dell'*inversione* delle figure: negli Annali delle Scienze (*Padova* VI. pag. 126) io pubblicai fino dal 1836 una Memoria, in cui oltre annunciare i 12 canoni ricordati dall'Hirst, ne feci l'applicazione alle proprietà del circolo dedotte da quelle della retta; cioè, le distanze dal centro sono eguali, quelle da due punti conjugati–armonici sono proporzionali; — gli angoli al centro sono doppii di quelli alla circonferenza, ed uguali alla somma dei due angoli coi vertici in due punti conjugati-armonici. — In simil modo io dimostrava il teorema Tolemaico, ed altre relazioni tra quattro punti di un circolo ed un punto qualunque; — poi *involuzione* fra sei punti di un piano relativo all'esagono, di cui tre lati alternativi hanno prodotto eguale a quello degli altri tre, e tre angoli alternativi sommano 360°. — La derivazione d'inversione rende facilissimo il descrivere un circolo, che passi per un punto e tocchi due circoli, ecc. — Inviluppo dei circoli, che tagliano due circoli dati sotto angoli costanti. — Proprietà di una figura sferica derivata da quella del quadrilatero circoscrivibile al circolo di avere la somma di due lati opposti eguale alla somma degli altri due.

Combinando l'*inversione* colla *reciprocità* io considerai anche la curva *inversa della reciproca* (che è la *svilupante della caustica* detta anche *caustica secondaria*, e poscia *derivata positiva*). La curva che ha per *isviluppante caustica* ossia *inverso-reciproca* un circolo è un'ellisse, i cui due raggi vettori hanno perciò somma costante.

Viceversa la inverso-reciproca del circolo è una concoide di altro circolo, dal che, ritornando alla figura primitiva risulta la proporzionalità delle distanze dei punti dell' ellisse da un foco e dalla sua polare; e la proporzionalità di ogni corda dell' ellisse passante per un foco al prodotto dei suoi due segmenti. — Dalle proprietà di ogni diametro dell'ellisse di tagliarla in due punti sotto angoli eguali deducevo due proprietà della concoide del circolo; cioè che ogni circolo passante pel *centro d'inversione* I e per l'*inverso centro* C taglia la concoide in due punti $M\ M_1$ sotto angoli eguali, e le tangenti della concoide in $M\ M_1$ formano tra loro un angolo doppio di MIM_1 o di MCM_1. — Similmente la proprietà dei due raggi vettori di incontrare l'ellisse sotto angoli eguali mi mostrava che la concoide è incontrata in M tanto dal circolo CIM quanto della retta IM sotto un angolo, che è la metà di MFI, essendo F l'*inverso-foco* cioè il punto di mezzo della retta IC. — Da ciò che i due raggi vettori hanno somma costante io deduceva che nella concoide la somma $MF + FI$ ha un rapporto costante con MI. — La concoide è poi inversa di sè medesima rispetto al punto F, ecc. — Sarebbe inutile ripetere la derivazione d'inversione, bensì può prendersi per centro d'inversione un punto differente dal foco dell'ellisse; prendendo il centro si ha una curva degna essa pure d'osservazione, che diventa la lemniscata quando invece che dall'ellisse si parte dall' iperbola-equilatera : essendo I il centro e $F\ F_1$ gli *inversi-fochi* della lemniscata, per ogni suo punto M si ha

$$FM.\, F_1M = (IF)^2\,;$$

la curva è incontrata sotto angoli eguali dai due circoli IFM, IF_1M; — la differenza tra i due angoli MFI, IF_1M è uguale al doppio dell'angolo, sotto cui il raggio IM incontra la lemniscata. — La proprietà degli asintoti dell' iperbola mi mostrava che un circolo che passa per I e tocca la lemniscata in M taglia sulle due tangenti del punto doppio I due corde, il cui prodotto è costante. L' inversione della parabola mi dava egualmente alcune proprietà della cardioide e della cissoide di Diocle; così in queste, oltre il punto di regresso I e la perpendicolare IC nell'asintoto, vi è l'*inverso-foco* F dato da $IF = 4.IQ$ ed un osservabile circolo col diametro $ID = -$ IF, ogni circolo che lo tagli ortogonalmente in I ed in L è normale anche alla cissoide in M e si ha $IL.\, FM = FI.\, LM$, ecc.

Feci uso dell'inversione anche nella memoria sulla classificazione delle curve del 3° ordine. (*Mem. Soc. Ital.* 1851 XXV), e tornai sull'argomento dell' inversione e della reciprocità nella memoria che voi aveste la cortesia di accogliere nei vostri *Annali* (*Nov.* 1852, III. pag. 508); le equipollenze mi diedero espressioni molto semplici delle curve derivate, che si ottengono alternando l' inversione e la reciprocità rispetto ad un medesimo centro di derivazione : notai tra le altre la relazione tra due curve reciproco-inverso-reciproche, per le quali le tangenti corrispondenti sono parallele ed hanno le distanze dal centro di derivazione inversamente proporzionali.

Permettetemi un' altra osservazione relativamente alla memoria del Sig. Catalan *Annali, Agosto* 1859. II. pag. 239). — A motivo del frequente uso dei *coefficienti dei fattoriali* io proposi negli Annali delle Scienze (*Padova* 1834. IV. p. 10) di segnarli con $(n)_r$ e ne diedi una tavoletta, che poscia riprodussi nei vostri *Annali* (*Roma, marzo* 1853. IV. pag. 108), nonchè in una memoria sul calcolo approssimato degli integrali (*Mem. Istituto Veneto* 1856. VI. pag. 98), questa tavola già data da altri Autori dovrebbe considerarsi come cosa nota. — Rispetto al fattoriale

$$[x]^n = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$$

basta prendere la Δifferenza finita per dimostrare che

$$\sum[x+1)^n = \frac{1}{n+1}[x]^{n+1} + \text{cost.},$$

se x è intero positivo, e se il primo membro esprime la somma

$$[1]^n + [2]^n \dots + [n]^n$$

la costante del secondo membro è nulla. Lo sviluppo della potenza in fattoriali

$$(-x-1)^n = [-x-1]^n - (1-n)_1[-x-1]^{n-1} + (2-n)_2[-x-1]^{n+2}\dots$$
$$\mp(-1)_{n+1}[-x-1]$$

ossia

$$(x+1)^n = [x-n+2]^n + (1-n)_1[x-n+3]^{n-1}\dots + (-1)_{n-1}[x+1]$$

dà prendendo la $\sum$ommatoria

$$1^n + 2^n \dots + x^n = \sum(x+1)^n = \frac{1}{n+1}[x-n+1]^{n+1} + \frac{1}{n}[x-n+2]^n \dots$$
$$+\frac{1}{3}(-2)_{n-2}[x-1]^3 + \frac{1}{2}[x]^2$$

$$(A) \qquad = \frac{1}{n+1}(x-n+1)\dots(x-1)\,x(x+1) + \frac{1}{n}(1-n)_1(x-n+2)\dots x(x+1)\dots$$
$$+\frac{1}{2}x(x+1)$$

formola che si trova anche nel Lacroix (*C. D. et I.* 1819. §. 985) e dà il mezzo più spedito per sommare le potenze dei numeri naturali. Così per esempio la somma delle potenze quarte dei numeri 1, 2, ... 100 sarà

$$\sum(101)^4 = \left(\frac{1}{5}\,97.\,98.\,99 + \frac{6}{4}\,98.\,99 + \frac{7}{3}\,99 + \frac{1}{2}\right)100.\,101;$$

per togliere le frazioni moltiplichiamo per 30, a la

$$\{ [(6.97 + 45) 98 + 70] 99 + 15 \} \frac{100.101}{30}$$

darà facilmente

$$\sum(101)^4 = 2650333330,$$

che può verificarsi mediante l'altra formola alcun poco meno comoda

$$\{ [(6.104 - 45) 103 + 70] 102 - 15 \} \frac{101.100}{30}.$$

I coefficienti $(-m)_r$ della (A) sono compresi nella tavola o possono calcolarsi colle formole da me riportate (*Annali* 1853. (5) (6) (7) (10) (49) (56)); del resto nel caso presente, se non si avesse la tavola, il metodo più diretto sarebbe quello di supporre successivamente $x = 1, 2, 3, 4$. È facile lo scorgere che i calcoli si eseguiscono sotto forma di *tabella* analoga a quelle con cui si divide un polinomio $x-a$, con questa differenza che i moltiplicatori cangiano da un termine al successivo, ecco la disposizione di calcolo per $x = 6$

$$\begin{array}{r|l} & 6 + 45 + 70 + 15 \\ \hline 3,\ 4,\ 5 & 6 + 63 + 322 + 1625 \end{array}$$

cioè

$$3.6 + 45 = 63, \quad 1.63 + 70 = 322, \quad 5.322 + 15 = 1625$$

oppure meno comodamente

$$\begin{array}{r|l} & 6 - 45 + 70 - 15 \\ \hline 10,\ 9,\ 8 & 6 + 15 + 205 + 1625 \end{array}$$

poscia si ha

$$1 + 2^4 \ldots + 6^4 = \frac{6.7}{30} 1625 = 2275.$$

Non credo che niuna formula più comoda abbia dato il Puiseux (*I. Liouville*, 1846 XI. p. 477) nè il Pepin (*Nouv. Ann. Terquem* 1856. XV. p. 27) nè il Catalan (*ivi* p. 230), e la formula che questi diede nei vostri *Annali* (p. 241) è precisamente la (A). Non sono nuove nemmeno le formule (D) (E) che il Catalan presenta come molto più comode di tutte le conosciute pel calcolo dei numeri Bernoulliani, giacchè esse risultano dalla (27) (*Annali* 1853. IV. p. 117) ponendovi $m=1$, $n=0$, $r = q + 1$, oppure $m = 1$, $n = -1$, $r = q + 1$. Altre formule si avrebbero dalle (6) giacchè feci vedere che i Bernoulliani si deducono dai $(0)_r$ $(1)_r$ togliendovi il fattore nullo. Del resto per calcolare i Bernoulliani credo più opportuno considerare i numeri interi dati da

$$b_2 = \frac{4.3}{2} B_1 = 1, \quad b_4 = \frac{16.15}{4} B_3 = 2, \quad b_6 = \frac{64.63}{6} B_5 = 16, \text{ ecc.}$$

pei quali vale la formula (36) che è riportata anche in questi *Annali* (1858. I. p. 260). Sono formule di calcolo più immediato le (52) (54).

Giusto Bellavitis.

PUBBLICAZIONI RECENTI

Serret. Paul. — Théorie nouvelle Géometrique, et Mécanique des lignes a double courbure. Vol. in 8° *Paris* 1860.

Duhamel. — Élements de calcul infinitésimal : nouvelle Édition. 2. vol. in 8° *Paris* 1860.

Atti dell'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei. Sessione II.ª del 8 Gennaro, Sessione III del 5. Feb. e Sessione IV del 4 Marzo 1860 : tre fascicoli in 4°

Liouville — Journal de Mathématiques pures et appliquées Janvier, Février, Mars, Avril 1860. Le Memorie contenute in questi primi quattro Numeri del 1860 sono le seguenti :

- *Liouville.* Sur quelques formules generales dans la théorie des nombres.
- *Mathieu Émile.* Mémoire sur le nombre de valeurs, que peut acquérir une fonction quand on y permute les variables de toutes les manieres possibles.
- *Marie M.* Nouvelle théorie de variables imaginaires.
- *Puiseux.* Mémoire sur le developpement en séries des coordonnées des planètes et de la fonction perturbatrice.
- *Liouville.* Théorème sur la theorie des nombres.
- *Puiseux.* Sur le developpement en serie de la fonction perturbatrice.
- *Liouville.* Sur le double d'un nombre premier $4\mu + 1$.
- *J. F. De Sperling.* Note sur un théorème de M.r *Sylvester.*
- *Liouville.* Note à l'occasion d'un théorème de M.r *Kronacker.*
- *Housel.* Surface de revolution du second ordre.

Terquem. — Nouvelles Annales de Mathématiques, Janvier, Février, Mars, Avril, Mai 1806. *Paris.* Cinque fascicoli in 8°

Grunert Joh. Aug. — Archiv der Mathematik und Physik. Tom. 34. N° 2° 1860. Greifswald. Questo fascicolo è tutto occupato dal Sig. Grunert con una lunga Memoria di Geometria analitica applicata alla Cristallografia.

Théorie Mathématique des courants électriques par *G.—S. Ohm*; traduction préface, et notes de *J.—M. Gaugain. Paris* 1860 in 8°

Crelle. — Journal Matematik. tom. 58 N° 1° *Berlin* 1860 in 4°

Dd Comberousse Ch. — Cours de Mathématiques tom. 1.er Arithmétique — Algebre in 8° Paris 1860.

LA TEORICA DELLE FUNZIONI ELLITTICHE.

MONOGRAFIA

DEL PROF. ENRICO BETTI. (*)

INTRODUZIONE.

1.

Una variabile complessa $w = u + iv$ dicesi funzione di un altra variabile complessa $z = x + iy$, quando ad ogni sistema di valori di x e di y corrispondono uno o più sistemi di valori determinati di u e di v.

Quando ad ogni sistema di valori di x e di y corrisponde un solo determinato sistema di valori di u e v, la funzione dicesi *monodroma*.

Chiameremo *indice* di una variabile complessa $z = x + iy$, il punto di coordinate x e y nel piano in cui intendiamo rappresentate nel modo ordinario le quantità complesse.

Se la funzione w è continua, quando l'indice di z percorre una linea continua, anche l'indice di w percorrerà una linea continua.

La funzione w sarà monodroma, se prenderà lo stesso valore per un valore di z che abbia l'indice in un punto Z, qualunque sia la linea percorsa per arrivarvi.

La derivata di w rapporto a z:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{du + i\,dv}{dx + i\,dy} = \frac{\left(\frac{du}{dx} + \frac{idv}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dy} + \frac{idv}{dy}\right)\frac{dy}{dx}}{1 + i\,\frac{dy}{dx}},$$

ha in generale un valore dipendente da $\frac{dy}{dx}$, ossia dipendente dalla direzione in cui si muove l'indice di z quando z aumenta di dz. Affinchè abbia un sol valore determinato e indipendente dalla direzione dell'aumento di z, è necessario e sufficiente che sia:

$$(1) \qquad \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} = 0\,; \qquad\qquad (2) \qquad \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} = 0 \cdot \ (^{**})$$

(*) Questa teorica è stata esposta nelle Lezioni di Analisi superiore date nella R. Università di Pisa nell'anno scolastico 1859—60.

(**) Vedi *Riemann*, Fondamenti di una teor. ec. negli Annali di Mat. Vol. 2.° pag. 291.

Le funzioni che godono questa proprietà, e quindi sodisfano alle equazioni (1) e (2), da *Cauchy* sono state chiamate *monogene.*

Dicesi funzione *analitica* di una variabile complessa z, una funzione, i cui valori si possono esprimere tutti mediante un numero finito o infinito di operazioni elementari di calcolo effettuate sopra il valore di z. Le funzioni analitiche sono tutte *monogene.*

Chiameremo funzioni *intere* quelle funzioni analitiche i cui valori possono esprimersi mediante una serie di potenze positive, e intere della variabile z, convergente per qualunque valore reale o complesso di z. Chiameremo funzioni *fratte* quelle funzioni analitiche i cui valori si possono esprimere mediante il rapporto di due funzioni intere.

Diremo *residuo integrale* di una funzione w rispetto a una linea il valore dell' integrale $\int w\, \mathrm{d}z$, quando s'intenda effettuata l' integrazione facendo percorrere all' indice di z tutta la linea.

2.

I principî fondamentali della teorica delle funzioni monogene e monodrome saranno il punto di partenza, dal quale saremo condotti naturalmente alle funzioni che fanno il soggetto principale di questa Monografia.

Teorema 1. *Il residuo integrale di una funzione monogena e monodroma w, rispetto a una linea chiusa* C, *è sempre eguale a zero, quando w non diviene infinita o discontinua in alcun punto compreso nell'area della linea* C.

Siano o, o', o'', o''' i punti di contatto delle quattro tangenti alla curva C che la limitano inferiormente, a destra, superiormente e a sinistra, e poniamo :

$$oo' = a\,, \quad oo'o'' = b\,, \quad oo'o''o''' = c\,, \quad oo'o''o'''o = d.$$

Avremo per il residuo integrale di w rispetto alla linea C :

$$(1) \qquad \int w\mathrm{d}z = \int (u + iv)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y)$$
$$= \int_o^d \left(u\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} - v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s + i\int_o^d \left(v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + u\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s.$$

Prendiamo ora l'integrale :

$$\iint \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

esteso a tutta l'area della linea C. Se v si mantiene per tutto finita e continua nell'interno di C, avremo :

$$\iint \frac{dv}{dx}\,dx\,dy = \int_0^b v\frac{dy}{ds}\,ds - \int_d^b v\frac{dy}{ds}\,ds = \int_0^d v\frac{dy}{ds}\,ds.$$

$$\iint \frac{du}{dy}\,dx\,dy = \int_c^a u\frac{dx}{ds}\,ds - \int_e^{d+a} u\frac{dx}{ds}\,ds = -\int_a^{d+a} u\frac{dx}{ds}\,ds = -\int_0^d u\frac{dx}{ds}\,ds;$$

e quindi

$$(2)\qquad \iint\left(\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\right)dx\,dy = \int_0^d\left(v\frac{dy}{ds} - u\frac{dx}{ds}\right)ds.$$

Analogamente si dimostra l'identità :

$$(3)\qquad \iint\left(\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dy}\right)dx\,dy = \int_0^d\left(v\frac{dx}{ds} + u\frac{dy}{ds}\right)ds,$$

quando si estenda egualmente l'integrale doppio.

Le formole (2) e (3) non presuppongono che w sia funzione analitica di z, ma non valgono altro che quando w si mantiene finita e continua in tutto lo spazio dell'integrazioni effettuate per trasformare gl' integrali doppi in integrali semplici, cioè in tutta l'area C.

Ora se la funzione w è monogena gli elementi degl' integrali doppi (2) e (3) sono nulli durante tutta l'integrazione. Quindi sono nulli questi medesimi integrali, e gl' integrali semplici che sono eguali a loro. Dunque è nullo il secondo membro dell'equazione (1), e quindi il residuo integrale, come volevamo dimostrare.

Teorema 2. *I residui integrali di una funzione monogena e monodroma w, rispetto a due linee aperte Z_1MZ_2, $Z_1M'Z_2$ che terminano ai medesimi punti Z_1 e Z_2, sono eguali se in tutti i punti dell'area compresa dalle due linee la funzione w è finita e continua.*

Infatti, per il teorema precedente, abbiamo :

$$\int w\,dz + \int^{1} w dz = 0,$$

quando il primo integrale si estenda alla linea Z_1MZ_2 e il secondo alla linea $Z_2M'Z_1$. Ma questo ultimo è eguale all'integrale esteso a $Z_1M'Z_2$, preso negativamente: onde avremo :

$$\int w\,dz = \int_1 w\,dz,$$

quando il primo integrale si estenda a tutta la linea Z_1MZ_2, e il secondo a $Z_1M'Z_2$, come volevamo dimostrare.

Teorema 3. *Il residuo integrale di una funzione monogena e monodroma w.*

rispetto a una linea chiusa C, *che contiene nel suo interno un sol punto* D, *nel quale la funzione* w *cessa di essere finita e continua, è eguale al residuo integrale di* w *rispetto a una linea e piccola quanto si vuole descritta intorno al punto* D.

Infatti, se uniamo con una linea s un punto di C con un punto di c, la linea s più la linea C percorsa da destra a sinistra, più la linea s percorsa in senso opposto, più la linea c percorsa da sinistra a destra formano un contorno chiuso nell'interno del quale w è per tutto finita e continua, e quindi la somma dei due residui integrali di w rispetto ad s presi in senso opposto, più il residuo integrale rispetto a C preso da destra a sinistra, più il residuo integrale rispetto a c da sinistra a destra, sarà eguale a zero. Essendo nulla la somma de' residui integrali rispetto ad s presi in senso opposto, e il residuo integrale rispetto a c preso da sinistra a destra essendo eguale al valore del residuo integrale rispetto a c da destra a sinistra preso con segno contrario, ne risulta che i residui integrali rispetto a C e a c presi nello stesso senso sono eguali, come volevamo dimostrare.

È facile a vedersi che se nell'interno di una linea chiusa C vi sono più punti d, d', d'' ..., nei quali w cessa di essere finita e continua, il residuo integrale di w rispetto a C sarà eguale alla somma dei residui integrali di w rispetto alle linee chiuse c, c', c'' . . . , piccole quanto si vuole, descritte rispettivamente intorno ai punti d, d', d'' . . . .

Teorema 4. *I valori di una funzione monogena e monodroma* w *possono ottenersi mediante una medesima serie di potenze positive e intere della variabile* z, *per tutti i valori di* z, *che hanno gl'indici compresi in un circolo* C *nell'interno del quale la funzione* w *non cessa mai di essere finita e continua.*

Sia il centro di questo circolo il punto A indice della quantità complessa a, e Z_0 sia l'indice di $a + z_0$. Indichiamo con w_0 il valore di w nel punto Z_0, cioè per il valore $a + z_0$ della variabile z.

La funzione:

$$\frac{w - w_0}{z - a - z_0}$$

sarà monogena, monodroma, finita e continua in tutti i punti del circolo. Poichè tali sono il numeratore e il denominatore, e il denominatore non diviene nullo altro che nel punto Z_0, nel quale diviene nullo anche il numeratore, e il valore della funzione in questo punto è evidentemente eguale alla derivata di w rapporto a z, la quale è unica e determinata perchè la funzione è monogena, è finita perchè la funzione è continua in tutti i punti del circolo.

Dunque per il teorema 1, avremo:

$$\int \frac{w - w_0}{z - a - z_0} \, dz = 0 \, ,$$

quando si estenda questo integrale a tutta la circonferenza C. Quindi:

$$\int \frac{w}{z-a-z_0}\,\mathrm{d}z = w_0 \int \frac{\mathrm{d}z}{z-a-z_0}.$$

Ora la funzione $\frac{1}{z-a-z_0}$ è monogena, monodroma, finita e continua in tutti i punti del circolo C, fuori che nel punto Z_0, dove diviene infinita; dunque per il teorema 3, l'integrale del secondo membro non muta valore se invece di estenderlo a tutta la circonferenza C, si estende a una circonferenza c descritta con raggio r piccolo quanto si vuole intorno a Z_0. Onde avremo, indicando con φ l'angolo variabile del raggio r coll'asse polare:

$$z-a-z_0 = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) = re^{\varphi i}, \qquad \mathrm{d}z = ire^{\varphi i}\,\mathrm{d}\varphi;$$

(2)
$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z-a-z_0} = i\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi i.$$

Sostituendo il valore (2) nell'equazione (1), abbiamo:

(3)
$$w_0 = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{w\mathrm{d}z}{z-a-z_0},$$

la quale è vera per qualunque punto Z_0 interno al circolo C.

L'integrale che comparisce nella equazione (3) deve estendersi a tutta la circonferenza C, sopra la quale si ha evidentemente:

$$\text{mod.}(z-a) > \text{mod.}z_0;$$

onde abbiamo in serie convergente:

$$\frac{1}{z-a-z_0} = \frac{1}{z-a} + \frac{z_0}{(z-a)^2} + \frac{z_0^2}{(z-a)^3} + \frac{z_0^3}{(z-a)^4} + \dots,$$

e quindi:

$$w_0 = \frac{1}{2\pi i}\left(\int \frac{w\mathrm{d}z}{z-a} + z_0\int \frac{w\mathrm{d}z}{(z-a)^2} + z_0^2\int \frac{w\mathrm{d}z}{(z-a)^3} + \dots\right).$$

Indicando con y la quantità $a+z_0$, che ha per indice Z_0, e con w semplicemente il valore corrispondente di w, finchè Z_0 sarà nell'interno di C, avremo:

$$w = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{w\mathrm{d}z}{z-a} + \frac{y-a}{2\pi i}\int \frac{w\mathrm{d}z}{(z-a)^2} + \frac{(y-a)^2}{2\pi i}\int \frac{w\mathrm{d}z}{(z-a)^3} + \dots,$$

e ponendo

$$z-a = re^{\varphi i},$$

$$(4)\qquad w=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w\,d\varphi+\frac{y-a}{2\pi r}\int_0^{2\pi} w\,e^{-\varphi i}\,d\varphi+\frac{(y-a)^2}{2\pi r^2}\int_0^{2\pi} w\,e^{-2\varphi i}\,d\varphi+\ldots$$

$$+\frac{(y-a)^n}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} w\,e^{-n\varphi i}\,d\varphi+\ldots.$$

Questa serie è convergente per tutti i valori di y, per i quali mod. $y-a<r$. Infatti, se diamo a w la forma $\rho e^{\theta i}$, avremo

$$\int_0^{2\pi} w\,e^{-n\varphi i}\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\rho\cos(\theta-n\varphi)d\varphi+i\int_0^{2\pi}\rho\,\mathrm{sen}(\theta-n\varphi)d\varphi,$$

ed ambedue gl'integrali del secondo membro sono minori dell'integrale $\int_0^{2\pi}\rho\,d\varphi$ che è eguale a una quantità finita M. Quindi

$$\text{mod.}\int_0^{2\pi} w\,e^{-n\varphi i}\,d\varphi<M,$$

qualunque sia n. Quindi la serie (4) sarà convergente quando sarà convergente la serie:

$$1+\frac{y-a}{r}+\frac{(y-a)^2}{r^2}+\ldots+\frac{(y-a)^n}{r^n}+\ldots,$$

cioè quando mod.$(y-a)<r$.

Osservando che la derivata n^{esima} di una funzione monogena di una variabile y, espressa da una serie convergente S, è eguale alla somma di una serie anch'essa convergente formata colle derivate n^{esime} dei termini della serie S, abbiamo:

$$\frac{d^n w}{dy^n}=\frac{1.\,2.\,3.\ldots n}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} w\,e^{-n\varphi i}\,d\varphi+(y-a)\gamma,$$

dove γ è una funzione intera di y; e quindi indicando con $\left(\frac{d^n w}{dy_n}\right)_a$ il valore di $\frac{d^n w}{dy^n}$ per $y=a$, si ottiene

$$\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} w\,e^{-n\varphi i}\,d\varphi=\frac{1}{1.\,2.\,3.\ldots n}\left(\frac{d^n w}{dy^n}\right)_a$$

e la serie (4) diviene:

$$(5)\qquad w=w_a+(y-a)\left(\frac{dw}{dy}\right)_a+\frac{(y-a)^2}{1.\,2}\left(\frac{d^2 w}{da^2}\right)_a+\ldots+\frac{(y-a)^n}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^n w}{dy^n}\right)_a+\ldots$$

3.

Dal teorema 4. del numero precedente si deduce immediatamente, che tutte le

funzioni le quali si mantengono monogene, monodrome, finite e continue per qualunque valore finito di una variabile complessa z sono funzioni analitiche intere di z, alle quali possono estendersi facilmente i teoremi fondamentali relativi alle funzioni razionali intere.

Teorema 1. *Una funzione intera w diviene sempre infinita per $z = \infty$.*

Una funzione intera w è sempre monogena, monodroma, finita e continua per tutti i valori finiti della variabile, quindi potrà porsi sotto la forma data dalla formula (4) del n.° 2:

$$w = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w\, d\varphi + \frac{z-a}{2\pi r}\int_0^{2\pi} w\, e^{-\varphi i}\, d\varphi + \frac{(z-a)^2}{2\pi r^2}\int_0^{2\pi} w\, e^{-2\varphi i}\, d\varphi + \ldots$$

dove r è il raggio di un circolo che ha il centro nel punto indice di a, di grandezza arbitraria. Prendiamo questo raggio infinito; se w non divenisse per questo valore anche esso eguale a infinito, gl'integrali avrebbero tutti un valore finito, e quindi tutti i termini della serie, eccettuato il primo, diverrebbero eguali a zero, e avremmo:

$$w = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w\, d\varphi = \text{costante}.$$

Dunque una funzione intera che non diviene infinita per $z = \infty$, non è una funzione di z, ma una costante.

Se diciamo *radice* di una funzione intera di z, un valore complesso di z per cui questa funzione si annulla, avremo il seguente:

Teorema 2. *Una funzione intera w ha sempre almeno una radice.*

Infatti se la funzione intera w non avesse alcuna radice finita, la funzione monogena e monodroma $\frac{1}{w}$ sarebbe finita e continua per tutti i valori finiti della variabile z; quindi sarebbe una funzione intera, e per il teorema precedente diverrebbe infinita per $z = \infty$, e quindi w si annullerebbe per $z = \infty$. Dunque una funzione intera o ha almeno una radice finita, o una infinita.

Teorema 3. *Ogni funzione intera, che non ha radici finite, è della forma e^w, essendo w una funzione intera.*

Infatti, se W è una funzione intera che non ha radici finite, $\log W$ sarà evidentemente una funzione monogena, finita e continua per ogni valore complesso finito della variabile z. Dimostriamo che sarà anche monodroma. Perciò basterà provare che tanto quando l'indice di z va da un punto z_1 a un altro z_2 per un cammino finito $z_1 m z_2$, quanto quando va da z_1 a z_2 per un altro cammino qualunque differente $z_1 n z_2$, pure finito, la funzione W prende sempre lo stesso valore in z_2. Poniamo $W = \rho e^{\theta i}$, e indichiamo ordinatamente con Z_1, M, Z_2, N gl'indici dei valori di W corrispondenti ai valori di z, che hanno per indici i punti z_1, m, z_2, n.

Gl'indici dei valori di W che corrispondono ai valori di z che hanno gl' indici nei punti dell'area finita $z_1 m\, z_2 n\, z_1$, si troveranno in un area finita che non conterrà il polo, perchè ρ non si annulla per nessuno di questi valori di z. Dunque la linea $Z_1 M\, Z_2 N\, Z_1$ sarà una linea chiusa che non conterrà nel suo interno il polo, e tanto quando l'indice di W va da Z_1 a Z_2 per la linea $Z_1 M Z_2$, quanto quando va da Z_1 a Z_2 per la linea $Z_2 N Z_2$, l'angolo θ prenderà nel punto Z_2 lo stesso valore, quindi $\log W = \log \rho + \theta i$ prenderà lo stesso valore qualunque sia il cammino che percorre l'indice della variabile z per andare da z_1 a z_2. Dunque log W è una funzione monodroma, e quindi essendo anche monogena, finita e continua per ogni valore finito di z, sarà una funzione intera w, e avremo $\log W = w$, e quindi $W = e^w$, come volevamo dimostrare.

Diremo che una funzione intera w è divisibile per un altra funzione intera w_1, quando esiste una funzione intera q, il cui prodotto per w_1 è eguale a w. La funzione q si dirà *quoziente* di w diviso per w_1, w_1 si dirà divisore o fattore di w.

Teorema 4. *Se a è radice della funzione intera w, questa funzione è divisibile per* $1 - \frac{z}{a}$.

La formula (5) del numero precedente quando a è radice di w, e quindi $w_a=0$, dà:

$$w = (z - a)\left[\left(\frac{dw}{dz}\right)_a + \frac{z-a}{1.2}\left(\frac{d^2w}{dz^2}\right)_a + \frac{(z-a)^2}{1.2.3}\left(\frac{d^3w}{dz^3}\right)_a + \dots\right].$$

La serie tra parentesi è convergente per ogni valore finito di z, quindi è una funzione intera di z; dunque w è divisibile per $z - a$, e anche per $1 - \frac{z}{a}$.

Se a oltre ad essere radice di w fosse radice anche delle funzioni intere:

$$\frac{dw}{dz},\ \frac{d^2w}{dz^2} \dots \frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}},$$

w sarebbe divisibile per $\left(1 - \frac{z}{a}\right)^n$, e si direbbe che a è n volte radice di z.

Teorema 5. *Una funzione intera* w, *che ha un numero finito di radici finite, e non ha radici infinite, è una funzione razionale intera.*

Siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$ le sole radici di w: avremo

$$w = \left(1 - \frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) w_1$$

e w non si annullerà per nessun valore finito o infinito di z, e sarà una funzione intera; quindi per il Teorema 2. sarà una costante, e w una funzione razionale intera.

Teorema 6. *Due funzioni intere w_1, w_2 che hanno le stesse radici non possono differire che per un fattore della forma e^w dove w è funzione intera.*

Infatti, indicando con q il rapporto $\frac{w_1}{w_2}$, avremo $w_1 = w_2 q$, e q non avrà radici finite: dunque sarà della forma e^w, e w funzione intera.

4.

Da ciò che abbiamo dimostrato nel numero precedente si rileva, che le funzioni intere che non risultano dal prodotto di una funzione razionale per un esponenziale e^w, dove w è funzione intera, hanno tutte un numero infinito di radici. Dimostriamo che gl' indici di queste radici devono sodisfare alla condizione di non formare una linea continua in nessuna parte del Piano.

Lemma 1. *Se w è una funzione intera di $z=x+iy$, riguardandola come funzione di p e di s, essendo p la lunghezza della normale a una data linea qualunque S, condotta dal punto di coordinate x, e y, ed s la lunghezza dell'arco di questa linea contata a partire da un punto fisso fino al punto dove la normale incontra la linea S, avremo:*

$$\frac{dw}{dp} + i\frac{dw}{ds} = 0\,.$$

Infatti, avremo:

$$\frac{dw}{dp} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dp} + i\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dp} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dp} + i\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dp},$$

$$\frac{dw}{ds} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{ds} + i\frac{dv}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{ds} + i\frac{dv}{dy}\frac{dy}{ds},$$

ed essendo:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{dy}{ds}, \qquad \frac{dy}{dp} = -\frac{dx}{ds},$$

sarà anche:

$$\frac{dw}{dp} = \frac{du}{dx}\frac{dy}{ds} + i\frac{dv}{dx}\frac{dy}{ds} - \frac{du}{dy}\frac{dx}{ds} - i\frac{dv}{dy}\frac{dx}{ds}:$$

onde:

$$\frac{dw}{dp} + i\frac{dw}{ds} = \left(\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy}\right)\left(\frac{dy}{ds} + \frac{idx}{ds}\right) - \left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dx}{ds} - i\frac{dy}{ds}\right).$$

Ma la funzione w è monogena, e quindi

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} = 0\,, \qquad \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} = 0\,.$$

Dunque sarà:

$$\frac{dw}{dp} + i\frac{dw}{ds} = 0\cdot$$

come volevamo dimostrare.

Lemma 2. *Se* w *e* w' *sono due funzioni intere, avremo:*

$$\int\left(w\frac{dw'}{dp} - w'\frac{dw}{dp}\right)ds = 0,$$

quando si estenda l'integrale a tutto il contorno di una linea chiusa S, *e* p *ed* s *abbiano il significato del lemma precedente.*

Ponendo $w = u + iv$, $w' = u' + iv'$, abbiamo per il Lemma 1:

$$\int\left(w\frac{dw}{dp} - w'\frac{dw}{dp}\right)ds = -\int\left(u\frac{du'}{dp} - u'\frac{du}{dp}\right)ds - \int\left(v\frac{dv'}{dp} - v'\frac{dv}{dp}\right)ds$$
$$+ i\int\left(u\frac{dv'}{dp} - v'\frac{du}{dp}\right)ds + i\int\left(v\frac{du'}{dp} - u'\frac{dv}{dp}\right)ds.$$

Ora questi integrali sono tutti nulli quando siano estesi a tutto il contorno della linea S. Lo dimostreremo per uno soltanto, per gli altri valendo la stessa dimostrazione. Abbiamo:

$$\int\left(u\frac{du'}{dp} - u'\frac{du}{dp}\right) = \int\left[\left(u\frac{du'}{dx} - u'\frac{du}{dx}\right)\frac{dy}{ds} - \left(u\frac{du'}{dy} - u'\frac{du}{dy}\right)\frac{dx}{ds}\right]ds$$
$$= \iint\left(\frac{d\left(u\frac{du'}{dx} - u'\frac{du}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(u\frac{du'}{dy} - u'\frac{du}{dy}\right)}{dy}\right)dx\,dy$$
$$= \iint\left[u\left(\frac{d^2u'}{dx^2} + \frac{d^2u'}{dy^2}\right) - u'\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right)\right]dx\,dy,$$

estendendo gl'integrali semplici a tutto il contorno, e i doppî a tutta l'area di S. Ma w e w' essendo monogene, si ha:

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = 0, \quad \frac{du'}{dx} - \frac{dv'}{dy} = 0, \quad \frac{du'}{dy} + \frac{dv'}{dx} = 0;$$

onde:

$$\frac{du^2}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0, \qquad \frac{d^2u'}{dx^2} + \frac{d^2u'}{dy^2} = 0\cdot$$

Quindi l'ultimo integrale doppio ha nulli tutti gli elementi, ed è eguale a zero. Dunque

$$\int\left(w\frac{dw'}{dp} - w'\frac{dw}{dp}\right)ds = 0;$$

come volevamo dimostrare.

Teorema. *Gl'indici delle radici di una funzione intera non possono formare una linea continua.*

Supponiamo che tutti i punti di una linea continua S siano indici di radici di w. Prendiamo di questa linea una porzione arbitraria $M_1 NM_2$. Descriviamo una circonferenza C che passi per M_1 e M_2, e abbia il centro in un punto O, chiamiamo c l'arco di questo circolo che termina in M_1 e M_2, e che racchiude colla linea M_1NM_2 un area che non contiene il centro O. Siano x_0 e y_0 le coordinate del centro O, e poniamo:

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Le funzioni w e $\log r$ sono monogene, monodrome, finite e continue nell'area compresa da M_1NM_2 e l'arco c, quindi in questo intervallo vale per le medesime il lemma 2, e abbiamo:

$$\int \left(w \frac{\mathrm{d} \log r}{\mathrm{d}p} - \log r \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}p} \right) \mathrm{d}s = 0,$$

avendo p ed s, rispetto alla linea formata da M_1NM_2 e da c, il significato che loro abbiamo dato nel lemma 1, ed estendendo l'integrale a tutta la linea M_1NM_2 e all' arco c.

Ora la parte dell'integrale relativa alla linea M_1NM_2 è nulla, perchè ivi è $w=0$, e $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}p}$, che per il lemma 1. è eguale a $-i\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}$, è anche essa eguale a zero, perchè w si mantiene costante sopra questa linea.

La parte d'integrale relativa all'arco di circolo c, si trasforma nel modo seguente. Se indichiamo con R il raggio del Circolo C, quando l'estremità mobile di s è sopra l'arco c, avremo:

$$r = \mathrm{R} - p\,,$$

e quindi

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p} = -1\,,$$

onde

$$\frac{\mathrm{d} \log r}{\mathrm{d}p} = -\frac{1}{r}:$$

e inoltre

$$\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\varphi:$$

onde l'integrale diverrà:

$$-\int_0^c w\,\mathrm{d}\varphi + i \log r \int_0^c \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s = 0\,.$$

Il secondo di questi integrali è nullo, perchè nei limiti M_1 e M_2 le parti reale e

imaginaria di w sono nulle. Dunque il primo integrale sarà anche esso eguale a zero, e quindi:

$$\int_0^c u\, d\varphi = 0\,, \qquad \int_0^c v\, d\varphi = 0.$$

Dunque u e v non possono conservare lo stesso segno sopra un arco c, piccolo quanto si vuole, che passi per due punti M_1 e M_2 della linea S. Se u e v non fossero nulli nella vicinanza di M_1NM_2 dovrebbero dunque variare di segno a intervalli minori di una quantità qualunque data, e quindi non sarebbero continue, e w non sarebbe una funzione intera. Dunque se w è intera e si annulla sopra una linea continua, dovrà annullarsi anche nei punti esterni e prossimi a questa linea, e quindi si potrà condurre un altra linea vicinissima a questa, e quindi un altra, e così indefinitamente, sopra tutte le quali si annulli. Dunque si annullerà in tutto il Piano, e non sarà una funzione di z, ma sarà zero.

Se gl'indici delle radici non possono formare una continuità, e devono essere un numero infinito quando la funzione non è il prodotto di una funzione razionale per una funzione intera che non ha radici altro che infinite, ne segue che le radici di una funzione intera non razionale non potranno esser mai contenute tutte in una porzione finita del Piano.

5.

Il prodotto $\Pi\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)$ esteso agli infiniti valori di α che sono radici di una funzione intera W, se è convergente per qualunque valore finito di z, è una funzione intera di z (*), che ha per radici tutte e sole le quantità α; e in questo caso la funzione W può porsi sotto la forma:

$$W = e^w\, \Pi\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)\cdot$$

essendo w una funzione intera, come risulta immediatamente dal teorema 6 del n.º 3.

Per istudiare questa decomposizione delle funzioni intere, della quale è un caso particolare la decomposizione delle funzioni razionali intere in fattori di primo grado, è necessario riferirsi alle condizioni di convergenza dei prodotti infiniti.

Qualunque sia il valore finito di z, il numero delle radici α di una funzione intera W che hanno il modulo minore o eguale a quello di z diviso per un numero finito qualunque ε, sarà sempre finito per il teorema del n.º 4. Quindi sarà finito il prodotto $\Pi\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)$ esteso a tutti i valori di α il cui modulo è minore o eguale a

(*) Vedi *Briot* et *Bouquet*. Théorie des fonctions double ec. pag. 435.

quello di z diviso per ε, e perchè sia convergente il prodotto totale basterà che sia tale il prodotto esteso a tutti i valori di α, per i quali è $\varepsilon \bmod \alpha > \bmod z$, che indicheremo con $\Pi'\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)$.

Ora, quando $\bmod z < \bmod \alpha$, abbiamo in serie convergente:

$$\log\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right) = - \frac{z}{\alpha} - \frac{z^2}{2\alpha^2} - \frac{z^3}{\alpha^3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{z}{\alpha} + \frac{1}{5}\frac{z^2}{\alpha^2} + \ldots\right).$$

Ma poichè il modulo di una somma è sempre minore della somma dei moduli, sarà:

$$\bmod\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{z}{\alpha} + \frac{1}{5}\frac{z^3}{\alpha^3} + \ldots\right) < \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{\bmod z}{\bmod \alpha} + \frac{1}{5}\frac{(\bmod z)^2}{(\bmod \alpha)^2}$$

$$+ \ldots < \frac{1}{3}\left[1 + \frac{\bmod z}{\bmod \alpha} + \left(\frac{\bmod z}{\bmod \alpha}\right)^2 + \ldots\right];$$

ed essendo $\bmod z < \varepsilon \bmod \alpha$, se prendiamo $\varepsilon = \frac{2}{3}$, avremo:

$$\frac{1}{3}\left(1 + \frac{\bmod z}{\bmod \alpha} + \frac{(\bmod z)^2}{(\bmod \alpha)^2} + \ldots\right) < 1,$$

e indicando con μ_α un numero complesso il cui modulo sia minore dell'unità, avremo:

$$\log.\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right) = - \frac{z}{\alpha} - \frac{z^2}{2\alpha^2} - \frac{z^3\mu_\alpha}{\alpha^3},$$

e quindi

$$\log \Pi'\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right) = - z\sum\frac{1}{\alpha} - \frac{z^2}{2}\sum\frac{1}{\alpha^2} - \frac{z^3}{\alpha^3}\sum\frac{\mu_\alpha}{\alpha^3}.$$

Se le serie $\sum\frac{1}{\alpha}$, $\sum\frac{1}{\alpha^2}$, $\sum\frac{1}{\alpha^3}$ sono convergenti, sarà convergente anche il prodotto infinito. Se una di esse è divergente, il prodotto infinito avrà per limite zero, o infinito, e non esprimerà una funzione intera. Dunque la convergenza di tutte tre queste serie è la condizione necessaria e sufficiente perchè il prodotto infinito sia eguale a una funzione intera.

Ora, relativamente a queste serie, abbiamo i seguenti teoremi:

Teorema 1. *Se gl'indici delle quantità α sono tutti sopra una stessa linea retta, e le distanze di due qualunque di essi è sempre minore di una quantità finita d, la serie $\sum\frac{1}{\alpha^\mu}$ sarà convergente indipendentemente dall' ordine dei suoi termini, quando è $\mu > 1$.*

Infatti, se θ è l'angolo della retta sopra cui si trovano gl'indici di tutte le quantità α, avremo $\alpha = \beta e^{\theta i}$, essendo β una quantità reale, e quindi:

$$\sum \frac{1}{\alpha^\mu} = e^{-\mu\theta i} \sum \frac{1}{\beta^\mu}.$$

Ora i numeri reali β si possono tutti porre sotto la forma $nd + \gamma$ essendo $\gamma < d$, e n un numero intero differente per due valori differenti di β, perchè la differenza di due valori di β è sempre minore di d; onde

$$\sum \frac{1}{\beta^\mu} = \sum \frac{1}{(nd+\gamma)^\mu};$$

ma

$$\sum \frac{1}{(nd+\gamma)^\mu} < \sum \frac{1}{n^\mu\, d^\mu},$$

ed essendo interi e differenti tutti i valori di n la serie $\sum \frac{1}{n^\mu\, d^\mu}$ sappiamo che è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini quando $\mu > 1$, quindi sarà convergente anche la serie $\sum \frac{1}{\beta^\mu}$, e $\sum \frac{1}{\alpha^\mu}$ quando $\mu > 1$, come volevamo dimostrare.

Teorema 2. *La serie* $\sum \frac{1}{\alpha^\mu}$ *è convergente indipendentemente dall'ordine dei suoi termini, quando* $\mu > 2$, *se gl'indici di tutte le quantità* α *sono distribuiti nel Piano in modo che la distanza di due qualunque di essi sia sempre minore di una quantità finita* d.

Infatti, se conduciamo nel Piano degl'indici due serie indefinite di parallelle all' asse delle x e all'asse delle y, in modo che la distanza di due parallelle successive sia $\frac{d}{\sqrt{2}}$, il Piano rimarrà diviso in un numero infinito di quadrati, che avranno la diagonale di una lunghezza eguale a d, e quindi non potranno contenere nel loro interno più di un indice di una quantità α. Da questa costruzione risulta evidente che tutte le quantità α potranno porsi sotto la forma:

$$(1) \qquad [m + \varepsilon + (n + \eta)i] \frac{d}{\sqrt{2}},$$

dove ε e η saranno quantità reali minori dell'unità, ed m e n numeri interi, e il sistema dei valori di m e n non potrà essere eguale per due differenti quantità α. Quindi i moduli delle quantità α saranno della forma:

$$(2) \qquad \left[(m+\varepsilon)^2 + (n+\eta)^2\right]^{\frac{1}{2}} \frac{d}{\sqrt{2}},$$

e la serie dei moduli dei termini della serie $\sum \frac{1}{\alpha^\mu}$ sarà:

$$(3)\qquad \frac{2^{\frac{\mu}{2}}}{d^{\mu}}\sum\sum\frac{1}{\left[(m+\varepsilon)^2+(n+\eta)^2\right]^{\frac{\mu}{2}}},$$

dove la somma deve estendersi a un numero infinito di sistemi differenti di valori reali e interi di m e di n, ed ε e η possono variare da un termine all'altro, ma si mantengono sempre reali e compresi tra 0 e 1.

La serie :

$$(4)\qquad \sum\sum\frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{\mu}{2}}}$$

moltiplicata per $\frac{2^{\frac{\mu}{2}}}{d^{\mu}}$ ed estesa come la serie (3) ha i suoi termini rispettivamente non minori dei termini della serie (3), onde per dimostrare la convergenza della serie (3) basterà dimostrare la convergenza della serie (4).

Per giungere a questo, decomponiamo la serie (4) in serie parziali, in modo che in quelle di queste serie parziali, che indicheremo con (k_1, k_2), i valori di m e n siano tutti quelli che verificano le diseguaglianze :

$$(5)\qquad 2^{k_1}\leq m\leq 2^{k_1+1},\qquad 2^{k_2}\leq n\leq 2^{k_2+1}.$$

Così avremo :

$$(6)\qquad \sum\sum\frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{\mu}{2}}}=\sum_{k_1=0}^{k_1=\infty}\sum_{k_2=0}^{k_2=\infty}(k_1, k_2):$$

È evidente che il numero dei termini di una serie parziale (k_1, k_2) non potrà superare il numero :

$$\left(2^{k_1+1}-2^{k_1}\right)\left(2^{k_2+1}-2^{k_2}\right)=2^{k_1+k_2}=2^{2k},$$

avendo posto $k_1+k_2=2k$.

Quanto al valore di questi medesimi termini, dalle diseguaglianze (5) si ricava:

$$2^{2k_1}+2^{2k_2}\leq m^2+n^2\leq 2^{2k_1+2}+2^{2k_2+2}.$$

Ma k essendo non maggiore di una delle due quantità k_1 e k_2, si avrà anche :

$$2^{2k}\leq m^2+n^2,$$

e quindi

$$\frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{\mu}{2}}} \leq \frac{1}{2^{k\mu}}.$$

Essendo tutti i termini di (k_1, k_2) in numero non maggiore di 2^{2k}, e ciascuno non maggiore di $\frac{1}{2^{k\mu}}$, avremo:

$$(k_1, k_2) \leq \frac{2^{2k}}{2^{k\mu}};$$

ed essendo

$$\frac{2^{2k}}{2^{k\mu}} = \frac{1}{2^{2k\left(\frac{\mu}{2}-1\right)}} = \frac{1}{2^{k_1\left(\frac{\mu}{2}-1\right)}} \cdot \frac{1}{2^{k_2\left(\frac{\mu}{2}-1\right)}},$$

sarà

$$(k_1, k_2) \leq \frac{1}{2^{k_1\left(\frac{\mu}{2}-1\right)}} \cdot \frac{1}{2^{k_2\left(\frac{\mu}{2}-1\right)}}.$$

Onde, sostituendo nell'equazione (6), avremo:

$$\Sigma\Sigma \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{\mu}{2}}} \leq \sum_{k_1=0}^{k_1=\infty} \sum_{k_2=0}^{k_2=\infty} \frac{1}{2^{k_1\left(\frac{\mu}{2}-1\right)}} \cdot \frac{1}{2^{k_2\left(\frac{\mu}{2}-1\right)}};$$

o anche

$$\Sigma\Sigma \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{\mu}{2}}} \leq \left(\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{2^{k\left(\frac{\mu}{2}-1\right)}}\right)^2.$$

Ma se $\mu > 2$

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{2^{k\left(\frac{\mu}{2}-1\right)}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2^{\frac{\mu}{2}-1}}}.$$

Dunque, quando $\mu > 2$

$$\Sigma\Sigma \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{\mu}{2}}} \leq \left(\frac{2^{\frac{\mu}{2}-1}}{2^{\frac{\mu}{2}-1}-1}\right)^2,$$

e quindi la serie (4) è convergente, e a più forte ragione la serie (3), e quindi, essendo convergente la serie dei moduli dei termini della serie $\Sigma\frac{1}{\alpha^\mu}$, questa serie sarà convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, come volevamo dimostrare.

6.

Dato un sistema di quantità complesse in numero infinito, che non formano con i loro indici nessuna linea continua si può sempre formare una funzione intera che abbia per radici tutte e sole queste quantità. Consideriamo separatamente due casi, secondo che gl'indici delle radici sono in linea retta, o distribuiti in tutto il Piano.

Teorema 1. *Dato un numero infinito di quantità complesse α i cui indici siano in linea retta a distanze finite tra loro, e simmetricamente disposti rispetto a un punto A di questa retta, si può sempre formare un prodotto infinito con i fattori binomi* $1-\frac{z}{a}$, *che sia una funzione intera, che abbia per radici tutte e sole queste quantità.*

Si può supporre che il punto A, rispetto al quale sono simmetricamente disposte le radici α, sia l'origine, perchè se fosse indice di una quantità β mutando z in $z-\beta$ il punto A diverrebbe l'origine.

Pertanto per ogni valore di α della forma $\rho e^{\theta i}$, ve ne sarà un altro della forza $-\rho e^{\theta i}$, quindi se nel prodotto infinito :

$$(1) \qquad z\Pi\left(1-\frac{z}{a}\right)$$

i fattori che contengono questi valori si dispongono uno dopo l'altro, la serie $\sum\frac{1}{\alpha}$, in cui i valori di α terranno lo stesso ordine, avrà una somma nulla. Essendo poi tutti gl'indici di α sopra la stessa retta, le serie $\sum\frac{1}{\alpha^2}$, $\sum\frac{1}{\alpha^3}$ sono sempre convergenti per il teorema 1. del numero precedente: dunque sarà convergente anche il prodotto (1), e darà una funzione intera, che avrà per radici tutte e sole le quantità α.

Teorema 2. *Dato un sistema di un numero infinito di quantità complesse α, che abbiano gl'indici a distanze finite tra loro, e disposti comunque sopra una retta, si può sempre formare un prodotto infinito di fattori binomi della forma* $1-\frac{z}{\alpha}$, *e di fattori esponenziali della forma* $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^z$, *che sia una funzione intera, che abbia per radici tutte e sole le quantità α.*

Infatti, il prodotto :

$$(1) \qquad \Pi\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^z\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)$$

sarà convergente, quando sia convergente la serie :

$$\sum\log\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)+z\sum\log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)=-\frac{z^2}{2}\sum\frac{1}{\alpha^2}-z^3\sum\frac{\mu_\alpha}{\alpha^3}-\frac{z}{2}\sum\frac{1}{\alpha^2}+z\sum\frac{\mu'_\alpha}{\alpha^3},$$

Ora le serie del secondo membro sono convergenti per il teorema 1° del numero 5, dunque il prodotto (1) è convergente, ed è una funzione intera, che ha per radici tutte e sole le quantità α, come volevamo dimostrare.

Teorema 3. *Dato un sistema di un numero infinito di quantità complesse* α, *le quali abbiano gl'indici a distanze finite, e disposti egualmente negli angoli di due assi ortogonali* A *e* B, *si può sempre formare un prodotto infinito con i soli fattori binomi* $1 - \frac{z}{\alpha}$, *che sia una funzione intera che abbia per radici tutte e sole le quantità* α.

Possiamo supporre che i due assi ortogonali siano gli assi delle x e delle y, perchè se la intersezione dei due assi è indice di una quantità complessa β, e φ è l'angolo che l'asse A fa coll'asse della x, mutando z in $e^{\varphi i}z + \beta$, l'asse A diviene asse delle x, e l'asse B asse delle y.

Prendiamo il prodotto:

$$\Pi\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right),$$

e osserviamo le serie $\sum \frac{1}{\alpha}$ e $\sum \frac{1}{\alpha^2}$. Essendo gl'indici delle quantità α disposti egualmente negli angoli opposti degli assi, per ogni valore di α della forma $\rho e^{\theta i}$, ve ne saranno tre della forma: $-\rho e^{\theta i}$, $\rho e^{\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)i}$, $-\rho e^{\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)i}$. Quindi per ogni valore di α^2 della forma $\rho^2 e^{2\theta i}$, ve ne saranno tre delle forme: $\rho^2 e^{2\theta i}$, $-\rho^2 e^{2\theta i}$, $-\rho^2 e^{2\theta i}$. Se dunque nel prodotto si prendano i fattori in modo che si succedano sempre i valori di α di queste quattro forme, lo stesso avverrà nelle serie $\sum \frac{1}{\alpha}$ e $\sum \frac{1}{\alpha^2}$, e queste serie saranno identicamente eguali a zero. La serie $\sum \frac{1}{\alpha^3}$ è convergente per il teorema 2° del numero 5. Quindi il prodotto sarà convergente, ed esprimerà una funzione intera, come volevamo dimostrare.

Teorema 4. *Dato un sistema di un numero infinito di quantità complesse* α, *che abbiano gl'indici a distanze finite tra loro, disposti comunque nel Piano, si può sempre formare un prodotto infinito di fattori binomi della forma* $1 - \frac{z}{\alpha}$, *e di fattori esponenziali della forma* $(1+a)^z$, $(1+a)^{z^2}$, *che sia una funzione intera, che abbia per radici tutte e sole le quantità* α.

Infatti, il prodotto:

$$P = \Pi\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^z \left(1 + \frac{1}{2\alpha^2}\right)^z \left(1 + \frac{1}{2\alpha^2}\right)^{z^2} \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)$$

sarà convergente, perchè avremo:

$$\log P = z\sum\frac{\mu_\alpha}{\alpha^3} - z\sum\frac{1}{8\alpha^4} + z\sum\frac{\mu'_\alpha}{8\alpha^6} - z^2\sum\frac{1}{8\alpha^4} + z^2\sum\frac{\mu''_\alpha}{8\alpha^6} - z^3\sum\frac{\mu'''_\alpha}{\alpha^3},$$

e tutte le serie che compariscono nel secondo membro sono convergenti per il teorema 2.° del numero 5.

Da questi teoremi si deduce che tutte le funzioni intere potranno decomporsi in un numero infinito di fattori di primo grado ed esponenziali, e qui comparisce una prima divisione delle funzioni intere. Quelle che hanno gl'indici delle radici in linea retta, e quelle che le hanno disposte comunque nel Piano; le prime che sono espresse da un prodotto semplicemente infinito le chiameremo di prima classe, le seconde che sono espresse da un prodotto doppiamente infinito le diremo di seconda classe. Le funzioni di prima classe si dividono anch'esse in due specie, la prima che comprende quelle che hanno gl'indici delle radici disposti simmetricamente rispetto a un punto, e che possono esprimersi per un prodotto infinito di fattori di primo grado, le altre, che hanno gl'indici delle radici disposti comunque sopra la retta, le quali si decomporranno in fattori di primo grado ed esponenziali. Ogni funzione intera di prima classe della prima specie potrà decomporsi nel prodotto di più funzioni intere della stessa classe di seconda specie, e data una funzione della seconda specie se ne potrà sempre trovare un altra che moltiplicata per la medesima dia per prodotto una funzione della prima specie. Le funzioni di seconda classe si dividono anch'esse in due specie; la prima comprenderà quelle che hanno gl' indici delle radici disposti egualmente nei quattro angoli di due assi ortogonali, in modo che facendo una rotazione intorno all'origine di un quarto di circolo, gl'indici di tutte le radici vengano a sovrapporsi, le quali funzioni possono esprimersi per un prodotto doppiamente infinito di fattori di primo grado; la seconda comprenderà quelle che hanno gl'indici disposti comunque, e si decompongono in un prodotto doppiamente infinito di fattori di primo grado e di fattori esponenziali. Data una funzione della seconda specie se ne potrà sempre trovare un altra che moltiplicata per quella dia una funzione della prima specie.

7.

Le funzioni monogene e monodrome che divengono infinite e discontinue per valori finiti di z in generale sono funzioni fratte. Per dimostrare ciò sarà necessario fondarsi sopra le proprietà dei residui integrali, come bisogna fare sempre quando voglionsi dimostrare proprietà delle funzioni senza supporre per esse alcuna espressione analitica.

Teorema 1. *Il residuo integrale di una funzione monogena e monodroma* $w = u + iv$, *rispetto a una linea chiusa* S, *è eguale a zero anche quando la funzione* w *diviene infinita o discontinua in un punto* D *dell'area racchiusa dalla linea* S,

se indicando con ρ il raggio di una circonferenza C *descritta col centro in* D, ρu *e* ρv *convergono indefinitamente verso zero col diminuire di* ρ.

Infatti il residuo integrale di w rispetto ad S per il teorema 2.° del numero 2, è eguale in questo caso al residuo integrale di w rispetto a C, per quanto piccolo sia il raggio ρ di questa circonferenza. Onde indicando con φ l'angolo che il raggio mobile ρ fa coll'asse delle x, avremo :

$$(1) \qquad \int w dz = \int_0^{2\pi} \left(u \frac{dx}{ds} - v \frac{dy}{ds} \right) \rho d\varphi + i \int_0^{2\pi} \left(v \frac{dx}{ds} + u \frac{dy}{ds} \right) \rho d\varphi .$$

Ora ρu e ρv col diminuire indefinitamente di ρ convergono a zero, $\frac{dx}{ds}$ e $\frac{dy}{ds}$ non sono maggiori dell'unità, perchè sono i coseni degli angoli, che la tangente alla curva C nel punto di coordinate x e y fa cogli assi, onde potrà sempre aversi un valor di ρ, per cui sia :

$$\left(u \frac{dx}{ds} - v \frac{dy}{ds} \right) \rho < \varepsilon , \quad \left(v \frac{dx}{ds} + u \frac{dy}{ds} \right) \rho < \varepsilon ,$$

essendo ε una quantità piccola quanto si vuole, e quindi :

$$\int_0^{2\pi} \left(u \frac{dx}{ds} - v \frac{dy}{ds} \right) \rho d\varphi < \varepsilon \int_0^{2\pi} d\varphi , \qquad \int_0^{2\pi} \left(v \frac{dx}{ds} + u \frac{dy}{ds} \right) \rho d\varphi < \varepsilon \int_0^{2\pi} d\varphi .$$

Integrando i secondi membri di queste uguaglianze, e sostituendo nella formula (1), avremo :

$$\int w \, dz < 2\pi\varepsilon (1 + i) ;$$

e dovendo essere ε più piccolo di qualunque quantità data, è chiaro che sarà $\int w dz$ eguale a zero, come volevamo dimostrare.

Teorema 2. *Una funzione* w *monogena e monodroma è finita e continua in tutti i punti dell'area* A *di una linea chiusa* S, *se per ogni punto* P *di* A, *indicando con* z_1 *l'indice di* P, *il prodotto* $(z - z_1) w$ *converge indefinitamente verso zero coll'avvicinarsi di* z *a* z_1.

Infatti, se nell'area A vi fosse un punto P nel quale w divenisse infinito o discontinuo, si avrebbe anche in questo punto coll'avvicinarsi indefinitamente di z a z_1,

$$\text{mod } (z - z_1) \cdot \frac{w - w_0}{z - z_0} = 0 ,$$

indicando con z_0 un valore che ha l'indice in un punto qualunque di A differente da P, e con w_0 il valore corrispondente di w. Quindi, per il teorema precedente, il residuo integrale di $\frac{w - w_0}{z - z_0}$ rispetto alla linea S sarebbe sempre eguale a zero, e per il ragio-

namento fatto per dimostrare il teorema 4 del numero 2, si avrebbe w espresso da una serie convergente per tutti i valori di z che hanno gl'indici nell'area A; onde w è sempre una funzione finita e continua nell'area A, come volevamo dimostrare.

Potrebbe il valore finito dato dalla serie nel punto P non coincidere col valore che ivi prende la funzione w; ma allora questa funzione si renderebbe finita e continua mutandone il valore soltanto in un punto, ed escluderemo dalle nostre considerazioni queste specie di funzioni.

Teorema 3. *Se una funzione w monogena e monodroma si mantiene finita e continua in tutta l'area* A *di una linea chiusa* S, *fuori che in un punto* Z_1 *indice di* z_1, *e se* μ *è la massima potenza di* $z-z_1$, *per la quale* $(z-z_1)^\mu w$ *converge indefinitamente verso una quantità differente da zero coll' avvicinarsi di* z *a* z_1, μ *sarà necessariamente un numero intero, e la funzione* w *potrà porsi sotto la forma:*

$$(1) \qquad w = \frac{a_1}{z-z_1} + \frac{a_1}{(z-z_2)^2} + \ldots + \frac{a_\mu}{(z-z_1)^\mu} + w_1 ,$$

dove w_1 *è una funzione finita e continua in tutta l'area* A.

Infatti, sia n il numero intero superiormente prossimo a μ; la funzione $(z-z_1)^{n-1}w$ moltiplicata per $z-z_1$ convergerà indefinitamente verso zero all'avvicinarsi di z a z_1, quindi, per il teorema 2, sarà finita e continua in tutta l'area A, e per $z=z_1$ acquisterà un valore finito a_{n-1}. Quindi la funzione:

$$(z-z_1)^{n-2}w - \frac{a_{n-1}}{z-z_1},$$

moltiplicata per $z-z_1$ convergerà indefinitamente verso zero coll'avvicinarsi di z a z_1, e perciò sarà finita e continua in tutta l'area A, e per $z=z_1$ acquisterà un valore finito a_{n-2}. Onde la funzione:

$$(z-z_1)^{n-3}w - \frac{a_{n-1}}{(z-z_1)^2} - \frac{a_{n-2}}{z-z_1}$$

moltiplicata per $z-z_1$ convergerà a zero coll'avvicinarsi di z a z_1, e quindi sarà finita e continua in tutta l'area A, e prenderà per $z=z_1$ un valore finito a_{n-3}. Così seguitando, essendo n un numero intero e finito, arriveremo a una funzione:

$$w - \frac{a_{n-1}}{(z-z_1)^{n-1}} - \frac{a_{n-2}}{(z-z_1)^{n-2}} - \ldots - \frac{a_n}{(z-z_1)^2} - \frac{a_1}{z-z_1}$$

che moltiplicata per $z-z_1$ convergerà verso zero coll' avvicinarsi di z a z_1, e sarà finita e continua in tutta l'area A. Indicandola con w_1, avremo:

$$w = \frac{a_1}{z-z_1} + \frac{a_2}{(z-z_2)^2} + \frac{a_3}{(z-z_3)^3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{(z-z_1)^{n-1}} + w_1 .$$

Dunque la massima potenza μ per cui $(z - z_1)^\mu w$ converge indefinitamente verso una quantità differente da zero, coll'avvicinarsi di z a z_1, è un numero intero $n - 1$, e la funzione w può porsi sotto la forma (1), come volevamo dimostrare.

Questo teorema ci mostra che le funzioni monogene e monodrome (coll'esclusione fatta nella dimostrazione del teorema 2°) non possono divenire discontinue senza divenire infinite.

I valori di z per i quali w diviene infinita, li chiameremo, col Sig. *Liouville*, gl'*infiniti* di w.

Se n è il minimo numero intero per cui $(z - z_1)^n w$ convergerà a zero coll'avvicinarsi di z a z_1, diremo che z_1 è $n - 1$ volte infinito di w.

Teorema 4. *Gl'indici degl'infiniti di una funzione w monogena e monodroma non possono formare una linea continua in alcuna parte del Piano.*

Infatti, se w fosse infinito lungo una linea continua, la funzione monogena e monodroma $\frac{1}{w}$ sarebbe nulla lungo tutta questa linea; e quindi nulla in tutto il Piano, per il teorema 3° del numero 4; e in conseguenza w sarebbe infinita in tutta il Piano, e non sarebbe una funzione di z.

Teorema 5. *Una funzione monogena, monodroma, non intera e che non diviene mai discontinua senza divenire infinita, è una funzione fratta.*

Infatti, se una funzione monogena e monodroma w non è intera, ammetterà un numero finito o infinito d'infiniti, i quali indicheremo con β. Ora per i teoremi del numero 5, potrà sempre formarsi una funzione intera w_2, che abbia per radici tutte e sole le quantità β, perchè gl'indici di β, per il teorema 4, sono a distanze finite tra loro. Moltiplicando questa funzione w_2 per w avremo una funzione intera w_1, perchè $w_2 w$ non potrà divenire infinita e discontinua in nessun punto del Piano. Infatti, $w_2 w$ non potrà evidentemente divenire infinita e discontinua altro che per i valori β, che sono infiniti di w. Ma per ogni valore β, abbiamo in un area A che non racchiude altri infiniti di w, fuori che β, essendo n il grado di moltiplicità di questo infinito:

$$w = \frac{a_1}{z - \beta} + \frac{a_2}{(z - \beta)^2} + \dots + \frac{a_n}{(z - \beta)^n} + \varpi,$$

dove ϖ ha un valore finito per $z = \beta$. La funzione w_2, avendo per radici tutti gl' infiniti di w collo stesso grado n di moltiplicità, sarà della forma:

$$w_2 = (z - \beta)^n \varpi_2,$$

essendo ϖ_2 una funzione intera. Onde

$$w_2 w = \varpi_2 \left[a_n + a_{n-1} (z - \beta) + \dots + a_1 (z - \beta)^{n-1} \right] + \varpi\varpi_2 (z - \beta)^n,$$

funzione che ha un valore finito per $z = \beta$. Dunque $w_2 w$ rimane finita e continua

per ogni valore finito di z, ed è una funzione intera w_1, e abbiamo:

$$w_2 w = w_1 ,$$

ossia:

$$w = \frac{w_1}{w_2} ;$$

e la funzione w è una funzione fratta, come volevamo dimostrare.

Pertanto le funzioni monogene e monodrome (escluse quelle che possiedono discontinuità che possono togliersi, mutandone il valore soltanto in punti separati) sono intere o fratte, come le funzioni razionali, e la loro teorica si dividerà in due parti, nella prima delle quali studieremo le più semplici funzioni intere, e nella seconda le funzioni fratte che si ottengono dai rapporti delle funzioni intere considerate.

PARTE PRIMA.

FUNZIONI INTERE.

1.

Le funzioni intere si dividono in due classi, come abbiamo veduto (Int. n.° 6.); funzioni intere di prima classe, le quali hanno gl'indici di tutte le radici sopra una medesima linea retta; funzioni intere di seconda classe, le quali hanno gl'indici delle loro radici disposti comunque in tutto il Piano.

Cominceremo dal considerare le funzioni di prima classe, e ci limiteremo a quelle che hanno gl'indici delle radici a distanze eguali uno dall'altro.

Sia A il punto indice della quantità complessa α, AB la retta che passando per il punto A fa coll'asse delle x un angolo eguale all'argomento della quantità complessa ω, e siano p_1, p_2, p_3, ... una serie infinita di punti tutti da una stessa parte del punto A sopra la retta AB, disposti in modo che sia:

$$Ap_1 = p_1 p_2 = p_2 p_3 = p_3 p_4 = , \dots$$

I punti A, p_1, p_2, p_3, ... saranno indici di quantità complesse tutte della forma:

$$(1) \qquad m\omega + \alpha ,$$

dove m è un numero reale, intero, sempre positivo o sempre negativo: lo supporremo sempre negativo. Una funzione intera, che avrà per radici tutte e sole le quantità (1), sarà una funzione intera della prima classe e della seconda specie (Int. n.° 6). Supporremo prima che sia $\alpha = 0$; cioè considereremo prima le funzioni intere che hanno per radici tutte e sole le quantità della forma:

$$(2) \qquad - m\omega ,$$

(*) Vedi *Journal de Liouville*. Vol. 1. pag. 300.

dove ω è una quantità complessa qualunque, ed m è reale, intero e positivo. Queste funzioni non potranno differire tra loro altro che per un fattore che non ammette radici finite. Basterà dunque considerarne una sola.

Il prodotto infinito:

$$\frac{z}{\omega}\prod_1^\infty\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{\frac{z}{\omega}}\left(1+\frac{z}{m\omega}\right)$$

è convergente per qualunque valore finito di z (Int. n.° 6); quindi esprime una funzione intera che ha per radici tutte e sole le quantità della forma (2). Questa funzione la indicheremo con $es\frac{z}{\omega}$, perchè avendo il sistema delle sue radici eguale, alla metà del sistema delle radici di $\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\omega}$, la chiameremo *emiseno*. Pertanto ponendo z invece di $\frac{z}{\omega}$ la funzione da studiarsi sarà:

$$\operatorname{es} z = z\prod_1^\infty\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^z\left(1+\frac{z}{m}\right),$$

oppure:

$$\operatorname{es} z = z\prod_1^\infty\left(\frac{m}{m+1}\right)^z\left(1+\frac{z}{m}\right): \tag{3}$$

alla quale può darsi anche la forma:

$$\operatorname{es} z = \lim z\,(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{z}{t-1}\right)t^{-z}, \tag{4}$$

oppure:

$$\operatorname{es} z = \lim \frac{z(z+1)(z+2)\ldots\ldots(z+t-1)}{1.\,2.\,3.\,\ldots\ldots(t-1)}\,t^{-z}. \tag{5}$$

La funzione es z sodisfa all'equazione:

$$\operatorname{es}(z+1) = \frac{1}{z}\operatorname{es} z. \tag{6}$$

Infatti, dall'equazione (3) abbiamo:

$$\operatorname{es}(z+1) = (z+1)\prod_1^\infty\left(\frac{m}{m+1}\right)^z\left(\frac{m}{m+1}\right)\left(1+\frac{z+1}{m}\right)$$

$$=\prod_1^\infty\left(\frac{m}{m+1}\right)^z\left(1+\frac{z}{m}\right)=\frac{\operatorname{es} z}{z}.$$

La funzione es z sodisfa l'equazione:

$$\lim_{w=\infty}\frac{\operatorname{es}(z+w)}{\operatorname{es} w}\,w^z = 1. \tag{7}$$

Infatti, dalla (4) abbiamo:

$$w^z \frac{\mathrm{es}(z+w)}{\mathrm{es}\, w}$$

$$= \lim \frac{\left(1+\frac{z}{w}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{2w}+\frac{1}{w}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{z}{3w}+\frac{1}{w}\right)\cdots\left(\frac{1}{t-1}+\frac{z}{(t-1)w}+\frac{1}{w}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{w}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{w}\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{w}\right)} t^{-z}\, w^z\,;$$

e quindi

$$\lim_{w=\infty} \frac{w^z \mathrm{es}(z+w)}{\mathrm{es}\, w} = 1\,.$$

Dalle (3) si ricava immediatamente l'equazione:

$$(8) \qquad \lim_{z=0} \frac{\mathrm{es}\, z}{z} = 1\,.$$

L'equazioni (6), (7) e (8) unite all'equazioni $\mathrm{es}\,0 = 0$ esprimono le condizioni necessarie e sufficienti alla determinazione della funzione $\mathrm{es}\, z$, come risulta dal seguente:

Teorema 1. *Tutte e sole le funzioni intere* $F(z)$ *che sodisfano all'equazioni:*

$$(a) \quad F(0) = 0\,, \qquad (b) \quad F(z+1) = \frac{1}{z} F(z)$$

$$(c) \quad \lim_{w=\infty} w^z \frac{F(z+w)}{F(w)} = 1\,, \qquad (d) \quad \lim_{z=0} \frac{F(z)}{z} = 1$$

sono necessariamente identiche colla funzione $\mathrm{es}\, z$.

Sodisfacendo all'equazioni (a) e (b) la funzione intera $F(z)$ avrà per radici tutte le quantità della forma $-m$, essendo m un numero reale, intero e positivo; quindi avrà per radici tutte le radici di $\mathrm{es}\, z$, e divisa per $\mathrm{es}\, z$ darà per quoziente una funzione intera $\varphi(z)$, e avremo:

$$F(z) = \varphi(z)\, \mathrm{es}\, z.$$

Dovendo sodisfare alla equazione (b), avremo:

$$F(z+1) = \varphi(z+1)\, \mathrm{es}(z+1) = \frac{1}{z} \varphi(z)\, \mathrm{es}(z)\,,$$

e, a cagione della (6):

$$(e) \qquad \varphi(z+1) = \varphi(z).$$

La equazione (c) darà inoltre:

$$\lim_{w=\infty} \frac{\varphi(z+w)}{\varphi(w)} \lim_{w=\infty} w^z \frac{\mathrm{es}(z+w)}{\mathrm{es}\, w} = 1\,;$$

onde, osservando la (7), abbiamo:

$$(f) \qquad \lim \frac{\varphi(z+w)}{\varphi(w)} = 1\,;$$

ma l' equazioni (e) e (f) non possono coesistere, a meno che non sia $\varphi(z)$ eguale a una costante C; onde:

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{C}\ \mathrm{es}\, z.$$

Ponendo questo valore nell'equazione (d), e osservando la equazione (8), abbiamo:

$$\mathrm{C} = 1.$$

Dunque:

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{es}\, z;$$

come volevamo dimostrare.

Teorema 2. *La moltiplicazione dell'argomento per un numero reale e intero* n *nella funzione* es z *è data dalla formula seguente:*

$$(9) \qquad \mathrm{es}\, nz = n^{1-nz} \frac{\prod_{t,0}^{n-1} \mathrm{es}\left(z + \frac{t}{n}\right)}{\prod_{t,1}^{n-1} \mathrm{es}\, \frac{t}{n}}.$$

Infatti, le radici della funzione intera es nz, sono tutte e sole le quantità della forma:

$$(a) \qquad -m\,, \quad -m - \frac{1}{n}, \quad -m - \frac{2}{n}, \ \ldots\ldots, \ -m - \frac{n-1}{n},$$

dove m indica un numero reale, intero e positivo qualunque. Ora tutte le quantità della prima delle forme (a) sono le sole radici della funzione es z, tutte le quantità della seconda sono le sole radici di $\mathrm{es}\left(z + \frac{1}{n}\right)$, quelle della terza sono le sole radici di $\mathrm{es}\left(z + \frac{2}{n}\right)$, e così discorrendo. Onde il sistema delle radici di es nz è identico col sistema delle radici del prodotto:

$$\mathrm{es}\, z\, \mathrm{es}\left(z + \frac{1}{n}\right) \mathrm{es}\left(z + \frac{2}{n}\right) \cdots \mathrm{es}\left(z + \frac{n-1}{n}\right),$$

e abbiamo (Int. n.º 3):

$$(b) \qquad \mathrm{es}\, nz = e^{\psi(z)} \prod_{t,0}^{n-1} \mathrm{es}\left(z + \frac{t}{n}\right),$$

indicando con $\psi(z)$ una funzione intera.

A cagione della equazione (6), ponendo $z + \frac{1}{n}$ invece di z, avremo:

$$e^{\psi\left(z+\frac{1}{n}\right)} \prod_0^{n-1} \frac{\mathrm{es}\left(z+\frac{t}{n}\right)}{z} = e^{\psi(z)} \prod_0^{n-1} \frac{\mathrm{es}\left(z+\frac{t}{n}\right)}{nz} ;$$

onde :

$$e^{\psi\left(z+\frac{1}{n}\right)} = \frac{e^{\psi(z)}}{n}, \qquad \psi\left(z+\frac{1}{n}\right) = \psi(z) + \log\frac{1}{n};$$

e integrando :

$$\psi(z) = nz \log\frac{1}{n} + \varphi(z) ,$$

essendo $\varphi(z)$ una funzione periodica, cioè una funzione che sodisfa all'equazione :

$$(c) \qquad \varphi\left(z+\frac{1}{n}\right) = \varphi(z).$$

Avremo dunque, sostituendo nella equazione (b) :

$$(d) \qquad \mathrm{es}\, nz = n^{-nz}\, e^{\varphi(z)} \prod_0^{n-1} \mathrm{es}\left(z+\frac{t}{n}\right).$$

Ponendo $z+w$ in luogo di z, abbiamo :

$$(e) \qquad \mathrm{es}(nz+nw) = n^{-nz-nw}\, e^{\varphi(z+w)} \prod_0^{n-1} \mathrm{es}\left(z+w+\frac{t}{n}\right).$$

Dividendo la (e) moltiplicata per $n^{nz}\, w^{nz}$, per la (d), dove in luogo di z sia posto w, otterremo :

$$\frac{\mathrm{es}(nz+nw)}{\mathrm{es}\, nw}(wn)^{nz} = e^{\varphi(z+w)-\varphi(w)} \prod_0^{n-1}\left(\frac{\mathrm{es}\left(z+\frac{t}{n}+w\right)}{\mathrm{es}\left(w+\frac{t}{n}\right)}\, w^{z}\right).$$

Passando al limite per $w=\infty$, e osservando la equazione (7), abbiamo :

$$\lim_{w=\infty}\left(\varphi(z+w)-\varphi(w)\right) = 0,$$

ossia

$$\lim_{w=\infty} \frac{\varphi(z+w)}{\varphi(w)} = 0,$$

che è incompatibile colla (c), se $\varphi(z)$ non è una costante C. Sarà dunque $\varphi(z)=C$, e avremo :

$$\mathrm{es}\, nz = Cn^{-nz} \prod_0^{n-1} \mathrm{es}\left(z+\frac{t}{n}\right).$$

Per determinare la costante C, divideremo ambedue i membri di questa equazione per nz, e porremo $z=o$; avremo, ponendo mente all'equazione (8) :

$$C = \frac{n}{\prod_{1}^{n-1}{}_t\, \mathrm{es}\frac{t}{n}}$$

onde :

$$\text{es}\, nz = n^{1-z} \frac{\overset{n-1}{\underset{0}{\Pi_t}} \text{es}\left(z + \frac{t}{n}\right)}{\overset{n-1}{\underset{0}{\Pi_t}} \text{es}\, \frac{t}{n}};$$

come volevamo dimostrare.

L'integrale definito studiato da *Eulero*, rappresentato da *Legendre* colla notazione $\Gamma(x)$ si esprime per la funzione $\text{es}\, x$.

Infatti, è noto che, finchè x e ν sono quantità reali e positive (*), si ha

$$\int_0^1 y^{x-1}(1-y)^\nu \, dy = \frac{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ \nu}{x(x+1)\ldots(x+\nu)},$$

e ponendo :

$$y = \frac{z}{\nu}, \qquad \int_0^\nu z^{x-1}\left(1 - \frac{z}{\nu}\right)^\nu dz = \frac{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ \nu}{x(x+1)\ldots(x+\nu)}\nu^x;$$

e passando al limite per $\nu = \infty$:

$$\int_0^\infty z^{x-1} e^{-z} \, dz = \frac{1}{\text{es}\, x};$$

onde :

$$(10) \qquad \Gamma(x) = \frac{1}{\text{es}\, x}.$$

Le funzioni intere che hanno per radici tutte e sole le quantità della forma :

$$(11) \qquad -m\omega - \alpha$$

dove α e ω sono numeri complessi qualunque, e m un intero, reale, positivo, si esprimeranno tutte per la funzione $\text{es}\, x$. Esse saranno tutte eguali a una funzione intera che non ha radici finite moltiplicata per la funzione intera :

$$\overset{\infty}{\underset{0}{\Pi}} \left(1 - \frac{1}{m+2}\right)^{\frac{z}{\omega}} \left(1 + \frac{z}{m\omega + \alpha}\right).$$

Questa funzione è data per mezzo di $\text{es}\, z$ dalla seguente formula :

$$(12) \qquad \overset{\infty}{\underset{0}{\Pi}} \left(\frac{m+1}{m+2}\right)^{\frac{z}{\omega}} \left(1 + \frac{z}{m\omega+\alpha}\right) = \frac{\text{es}\, \frac{z+\alpha}{\omega}}{\text{es}\, \frac{\alpha}{\omega}}.$$

Infatti, dalla equazione (3) abbiamo :

(*) Vedi nel volume 2º delle *Commentationes Soc. R. Scientiarum Gottingensis* la Memoria di *Gauss* intitolata *Disq. gen. circa seriem* in f.

$$\mathrm{es}\left(\frac{z+\alpha}{\omega}\right)=\frac{z+\alpha}{\omega}\prod_1^\infty\left(\frac{m}{m+1}\right)^{\frac{z}{\omega}}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{\frac{\alpha}{\omega}}\left(1+\frac{z+\alpha}{m\omega}\right)$$

$$=\frac{\alpha}{\omega}\left(1+\frac{z}{\alpha}\right)\prod_1^\infty\left(\frac{m}{m+1}\right)^{\frac{z}{\omega}}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{\frac{\alpha}{\omega}}\left(1+\frac{\alpha}{m\omega}\right)\left(1+\frac{z}{m\omega+\alpha}\right);$$

onde :

$$\frac{\mathrm{es}\left(\frac{z+\alpha}{\omega}\right)}{\mathrm{es}\,\frac{\alpha}{\omega}}=\prod_0^\infty\left(\frac{m+1}{m+2}\right)^{\frac{z}{\omega}}\left(1+\frac{z}{m\omega+\alpha}\right).$$

Ponendo nell'equazione (12) :

$$\alpha=\frac{\omega}{2}$$

si ha :

$$\mathrm{es}\left(\frac{z}{\omega}+\frac{1}{2}\right)=\mathrm{es}\,\frac{1}{2}\prod_0^\infty\left(\frac{m+1}{m+2}\right)^{\frac{z}{\omega}}\left(1+\frac{2z}{(2m+1)\omega}\right)$$

e quindi, indicando con ec z la funzione $\frac{\mathrm{es}(\frac{1}{2}+z)}{\mathrm{es}\,\frac{1}{2}}$:

$$(13)\qquad \mathrm{ec}(z)=\prod_0^\infty\left(\frac{m+1}{m+2}\right)^{z}\left(1+\frac{2z}{2m+1}\right).$$

Rappresentiamo con ec z, e denominiamo *emicoseno* di z la funzione $\frac{\mathrm{es}(\frac{1}{2}+z)}{\mathrm{es}\,\frac{1}{2}}$, perchè il sistema delle sue radici è la metà del sistema delle radici del *coseno* di πz.

2.

Passiamo ora a considerare le funzioni di prima classe e di prima specie. Ci limiteremo a quelle che hanno tutti gl'indici delle loro radici a eguali distanze, cioè che hanno per radici tutte e sole le quantità della forma :

$$m\omega+\alpha,$$

dove ω e α sono numeri complessi qualunque, e m un numero intero e reale qualunque. Supporremo prima $\alpha=0$.

Le funzioni che avranno per radici tutte e sole le quantità della forma :

$$(1)\qquad m\omega$$

non potranno differire tra loro altrochè per un fattore, funzione intera che non ammette ra-

dici finite. Basterà dunque prendere a considerare una sola di queste funzioni.

Il prodotto infinito :

$$(2) \qquad z\prod_1^\infty\left(1+\frac{z}{m\omega}\right)\left(1-\frac{z}{m\omega}\right)=z\prod_1^\infty\left(1-\frac{z^2}{m^2\omega^2}\right)$$

è una funzione intera, perchè è convergente per qualunque valore finito di z ; ed ha per radici tutte e sole le quantità (1).

È chiaro che due funzioni (2) che differiscono per il valore di ω, si possono esprimere una per l'altra. Quindi per ω potremo prendere un valore qualunque. Prenderemo quel valore che fa acquistare alla funzione il valore eguale all'unità, quando $z=\frac{\omega}{2}$; cioè determineremo ω per l'equazione :

$$\frac{\omega}{2}\prod_1^\infty\left(1-\frac{1}{4m^2}\right)=1,$$

ossia :

$$\frac{\omega}{2}=\prod_1^\infty\frac{4m^2}{4m^2-1}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots$$

Ma questa è l'espressione di *Wallis* per il numero $\frac{\pi}{2}$; prenderemo dunque :

$$\omega=\pi,$$

e avremo :

$$(3) \qquad f(z)=z\prod_1^\infty\left(1-\frac{z^2}{m^2\pi^2}\right),$$

$$(4) \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\cdot$$

Prendiamo le due funzioni :

$$\operatorname{es}\frac{z}{\pi}=\frac{z}{\pi}\prod_1^\infty\left(\frac{m}{m+1}\right)^{\frac{z}{\pi}}\left(1+\frac{z}{m\pi}\right),$$

$$\operatorname{es}-\frac{z}{\pi}=-\frac{z}{\pi}\prod_1^\infty\left(\frac{m}{m+1}\right)^{-\frac{z}{\pi}}\left(1-\frac{z}{m\pi}\right)\cdot$$

Moltiplicandole tra loro, si ottiene :

$$(5) \qquad f(z)=-\frac{\pi^2}{z}\operatorname{es}\frac{z}{\pi}\operatorname{es}-\frac{z}{\pi}\cdot$$

La funzione intera $f(z)$ sodisfa l'equazione :

$$(6) \qquad f(z+\pi)=-f(z).$$

Infatti, dalla (5) abbiamo:

$$f(z+\pi) = -\frac{\pi^2}{z+\pi}\,\mathrm{es}\left(\frac{z}{\pi}+1\right)\mathrm{es}\left(-\frac{z}{\pi}-1\right);$$

ma dalla equazione (6) del numero precedente, si ha:

$$\mathrm{es}\left(\frac{z}{\pi}+1\right) = \frac{\pi}{z}\,\mathrm{es}\left(\frac{z}{\pi}\right); \qquad \mathrm{es}\left(-\frac{z}{\pi}-1\right) = -\frac{z+\pi}{\pi}\,\mathrm{es}\left(-\frac{z}{\pi}\right)$$

onde:

$$f(z+\pi) = \frac{\pi^2}{z}\,\mathrm{es}\,\frac{z}{\pi}\,\mathrm{es}\left(-\frac{z}{\pi}\right) = -f(z).$$

Dalla (6) si deduce immediatamente:

$$(7) \qquad f(z+2\pi) = f(z).$$

La funzione $f(z)$ sodisfa all'equazione:

$$(8) \qquad \lim_{w=\infty} \frac{f(z+w)}{e^{iz} f(w)} = 1.$$

Infatti, avremo dall'equazione (5):

$$\frac{f(z+w)}{f(w)} = \frac{1}{1+\frac{z}{w}}\;\frac{\mathrm{es}\left(\frac{z+w}{\pi}\right)\mathrm{es}\left(-\frac{z+w}{\pi}\right)}{\mathrm{es}\,\frac{w}{\pi}\;\mathrm{es}\,-\frac{w}{\pi}}.$$

Ora, essendo $e^{\pi i x} = (-1)^x$, avremo

$$\frac{f(z+w)}{e^{iz} f(w)} = \frac{1}{1+\frac{z}{w}}\;\frac{\mathrm{es}\left(\frac{z}{\pi}+\frac{w}{\pi}\right)}{\mathrm{es}\,\frac{w}{\pi}}\left(\frac{w}{\pi}\right)^{\frac{z}{\pi}}\frac{\mathrm{es}\left(-\frac{z+w}{\pi}\right)}{\mathrm{es}\,-\frac{w}{\pi}}\left(-\frac{w}{\pi}\right)^{-\frac{z}{\pi}}.$$

Passando al limite per $w=\infty$, e osservando la equazione (7) del numero precedente, si ottiene:

$$\lim \frac{f(z+w)}{e^{iz} f(z)} = 1,$$

come volevamo dimostrare.

Dalla (3) si deduce immediatamente:

$$(9) \qquad \lim_{z=0} \frac{f(z)}{z} = 1.$$

Le equazioni (6), (8), (9) unite alla equazione $f(0)=0$, esprimono le condizioni necessarie e sufficienti alla determinazione di $f(z)$, come abbiamo dal seguente:

Teorema. *Tutte e sole le funzioni intere che sodisfano a tutte quattro le equa-*

zioni :

$$(a) \qquad f(0) = 0 , \qquad\qquad (b) \qquad f(z+\omega) = -f(z) ,$$

$$(c) \qquad \lim \frac{f(z+w)}{e^{\frac{\pi i z}{\omega}} f(w)} = 1 , \qquad\qquad (d) \qquad \lim \frac{f(z)}{z} = \frac{\omega}{\pi} ;$$

sono identiche alla funzione $f\left(\frac{z\pi}{\omega}\right)$.

Infatti, se la funzione $f(z)$ sodisfa contemporaneamente alle due equazioni (a) e (b) avrà per radici tutte le quantità della forma $m\omega$, e quindi avremo:

$$f(z) = \varphi(z)\, f\left(\frac{z\pi}{\omega}\right)$$

essendo $\varphi(z)$ una funzione intera, che sodisfa all'equazione:

$$(e) \qquad \varphi(z+\omega) = \varphi(z).$$

Sodisfacendo le $f(z)$ alla equazione (c), avremo:

$$\lim_{w=\infty} \frac{\varphi(z+w)}{\varphi(w)} \lim \frac{f\left(\frac{z\pi}{\omega}+w\right)}{e^{\frac{\pi i z}{\omega}} f(w)} = 1$$

ed osservando l'equazione (8):

$$\lim_{w=\infty} \frac{\varphi(z+w)}{\varphi(w)} = 1;$$

equazione che contradice alla equazione (e), se $\varphi(z)$ non è una costante. Onde;

$$\varphi(z) = \mathrm{C} ,$$

e

$$f(z) = \mathrm{C} f\left(\frac{z\pi}{\omega}\right).$$

Per le equazioni (d) e (9) abbiamo $\mathrm{C} = 1$, e quindi:

$$f(z) = f\left(\frac{z\pi}{\omega}\right),$$

come volevamo dimostrare.

Ora è noto che la funzione $\operatorname{sen} z$ sodisfa alle equazioni:

$$\operatorname{sen} 0 = 0, \quad \operatorname{sen}(z+\pi) = -\operatorname{sen} z, \quad \lim_{w=\infty} \frac{\operatorname{sen}(z+w)}{e^{iz} \operatorname{sen} w} = 1 , \quad \lim_{z=0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 ,$$

quindi:

$$(10) \qquad f(z) = \operatorname{sen} z ,$$

ed abbiamo:

$$(11)\qquad \operatorname{sen} z = -\frac{\pi^2}{z}\operatorname{es}\frac{z}{\pi}\operatorname{es}-\frac{z}{\pi},$$

e anche:

$$(12)\qquad \operatorname{sen} z = \pi\operatorname{es}\frac{z}{\pi}\operatorname{es}\left(1-\frac{z}{\pi}\right).$$

Se poniamo nella equazione (12), $z=\frac{\pi}{2}$. abbiamo:

$$(13)\qquad \operatorname{es}\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Prendiamo per il radicale il segno positivo, perchè dalla (3) risulta chiaramente che es z ha valori positivi per valori reali e positivi di z.

Dalla teorica algebrica della divisione della circonferenza è nota la formola:

$$\prod_{1}^{n-1}\operatorname{sen}\frac{t\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

Sostituendo i valori dei seni dati dalla (12), abbiamo:

$$\prod_{1}^{n-1}\operatorname{sen}\frac{t\pi}{n}=\pi^{n-1}\prod_{1}^{n-1}{}_t\operatorname{es}\frac{t}{n}\operatorname{es}\left(1-\frac{t}{n}\right)=\pi^{n-1}\prod_{1}^{n-1}{}_t\operatorname{es}^2\frac{t}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$$

onde:

$$(14)\qquad \prod_{1}^{n-1}{}_t\operatorname{es}\frac{t}{n}=\frac{\sqrt{n}}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}};$$

e quindi l'equazione (9) del numero precedente diviene:

$$(15)\qquad \operatorname{es} nz = n^{\frac{1}{2}-nz}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\prod_{1}^{n-1}{}_t\operatorname{es}\left(z+\frac{t}{n}\right).$$

Teorema. *La moltiplicazione dell' argomento delle funzioni* sen z *è data dalla seguente formula*:

$$(16)\qquad \operatorname{sen} nz = 2^{n-1}\prod_{0}^{n-1}{}_t\operatorname{sen}\left(z+\frac{t\pi}{n}\right).$$

Infatti dalla equazione (12) abbiamo:

$$\operatorname{sen} nz=\pi\operatorname{es}\frac{nz}{\pi}\operatorname{es}\left(1-\frac{nz}{\pi}\right);$$

e sostituendo i valori di es nz e di es $n\left(\frac{1}{n}-\frac{z}{\pi}\right)$ dati dalla formola (15), si ottiene:

$$\operatorname{sen} nz = \pi(2\pi)^{n-1} \prod_{0}^{n-1}{}_t \operatorname{es}\left(\frac{z}{\pi} + \frac{t}{n}\right) \operatorname{es}\left(\frac{1}{n} - \frac{z}{\pi} + \frac{t}{n}\right)$$

$$= \pi(2\pi)^{n-1} \prod_{0}^{n-1}{}_t \operatorname{es}\left(\frac{z}{\pi} + \frac{t}{n}\right) \operatorname{es}\left[1 - \left(\frac{z}{\pi} + \frac{t}{n}\right)\right];$$

onde ponendo mente all'equazione (12):

$$\operatorname{sen} nz = 2^{n-1} \prod_{0}^{n-1}{}_t \operatorname{sen}\left(z + \frac{t\pi}{n}\right);$$

come volevamo dimostrare.

Le funzioni intere che hanno per radici tutte e sole le quantità della forma:

$$m\omega + \alpha,$$

dove ω ed α sono quantità complesse, ed m è un numero intero e reale qualunque, si esprimeranno tutte per la funzione $\operatorname{sen} z$. Poichè saranno eguali a una funzione intera, che non ha radici finite, moltiplicata per la funzione intera:

$$\prod_{-\infty}^{\infty}{}_m \left(1 - \frac{z}{m\omega + \alpha}\right);$$

e questa è data per mezzo di due seni dalla formula seguente:

$$(17) \qquad \prod_{-\infty}^{\infty}{}_m \left(1 - \frac{z}{m\omega + \alpha}\right) = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{\omega}(\alpha - z)}{\operatorname{sen} \frac{\pi\alpha}{\omega}}.$$

Infatti, abbiamo:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi(\alpha - z)}{\omega} = \frac{\pi}{\omega}(\alpha - z) \prod_{1}^{\infty}{}_m \left(1 - \frac{\alpha - z}{m\omega}\right)\left(1 + \frac{\alpha - z}{m\omega}\right)$$

$$= \frac{\pi\alpha}{\omega}\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right) \prod_{1}^{\infty}{}_m \left(1 - \frac{\alpha}{m\omega}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{m\omega}\right) \prod_{1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{m\omega - \alpha}\right)\left(1 - \frac{z}{m\omega + \alpha}\right);$$

onde

$$\prod_{-\infty}^{\infty}{}_m \left(1 - \frac{z}{m\omega + \alpha}\right) = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi(\alpha - z)}{\omega}}{\operatorname{sen} \frac{\pi\alpha}{\omega}}.$$

Ponendo nella (17) $\omega = \pi$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, abbiamo:

$$\prod_{-\infty}^{\infty}{}_m \left(1 - \frac{2z}{2m + 1}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z;$$

ma dalla equazione (12) abbiamo:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi - z\right) = \pi \operatorname{es}\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{\pi}\right)\operatorname{es}\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{\pi}\right);$$

onde per la equazione (13):

$$(18) \qquad \cos z = \operatorname{ec} z \operatorname{ec}(-z).$$

3.

Passiamo ora alle funzioni intere di seconda classe, e limitiamoci a quelle che hanno gl'indici di tutte le loro radici nei punti d'intersezione di due sistemi di rette parallelle ed equidistanti tra loro.

Teorema 1. *I punti d'intersezione di due sistemi di rette parallele ed equidistanti tra loro sono indici di quantità tutte della forma:*

$$m\omega + n\omega' + \alpha,$$

dove m ed n sono numeri interi e reali qualunque, α, ω *e* ω' *sono quantità complesse, ed il rapporto* $\frac{\omega'}{\omega}$ *non è reale; e reciprocamente.*

Infatti, per ottenere un sistema di punti che siano intersezioni di due sistemi di rette parallele ed equidistanti tra loro, bisognerà prendere un punto A, e condurre per il medesimo due rette AB, AB' che facciano rispettivamente coll'asse delle x gli angoli φ e φ', la differenza dei quali non sia un multiplo di π, prendere sopra AB una serie di punti:

$$\ldots\ldots A_{-3},\ A_{-2},\ A_{-1},\ A,\ A_1,\ A_2,\ A_3\ldots\ldots$$

in modo che sia:

$$\ldots\ldots = A_{-2}A_{-1} = A_{-1}A = AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = r;$$

sopra AB' una serie indefinita di punti:

$$\ldots\ldots A'_{-3},\ A'_{-2},\ A'_{-1},\ A,\ A'_1,\ A'_2,\ A'_3,\ldots\ldots$$

in modo che sia:

$$\ldots\ldots = A'_{-3}A'_{-2} = A'_{-2}A'_{-1} = A'_{-1}A = AA'_1 = A'_1A'_2 = A'_2A'_3 = \ldots = r',$$

e condurre per ogni punto A_m una retta $A_m B'_m$ parallella ad AB', e per ogni punto A'_n una retta $A'_n B_n$ parallela ad AB. I punti $A_{m,n}$ intersezioni delle rette $A_m B'_m$ e $A'_n B'_n$ saranno i punti d'intersezione di due sistemi di rette parallele ed equidistanti tra loro. Ora è chiaro che, ponendo:

$$\omega = re^{\varphi i}, \quad \omega' = r'e^{\varphi' i},$$

e indicando con α la quantità complessa che ha per indice il punto A, ogni punto $A_{m,n}$ sarà indice di una quantità complessa della forma:

$$(1) \qquad m\omega + n\omega' + \alpha,$$

dove m e n sono numeri interi e reali. Non dovendo gli angoli φ e φ' differire tra loro di un multiplo di π, è chiaro che il rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$ non potrà essere reale.

Se poniamo ω e ω' sotto la forma:

$$(1') \qquad \omega = a + bi, \qquad \omega' = c + di,$$

avremo:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{ac + bd + (ad - bc)i}{a^2 + b^2}.$$

Il determinante $ad - bc$, che chiameremo *determinante* del sistema degl'indici delle quantità (1), dovrà essere differente da zero.

È facile a dimostrarsi che il valore di questo determinante preso positivamente esprime l'area dei parallelogrammi $A_{m,n}\, A_{m+1,n}\, A_{m,n+1}\, A_{m+2,n+1}$, che si chiameranno parallelogrammi *elementari*.

Teorema 2. *Gl'indici delle quantità:*

$$(1) \qquad m\omega + n\omega' + \alpha,$$

ed

$$(2) \qquad m\Omega + N\Omega' + \alpha,$$

dove m, n ed M, N *sono numeri interi e reali qualunque, formano il medesimo sistema di punti, quando abbiansi le relazioni:*

$$(3) \qquad \Omega = \mu\omega + \nu\omega', \qquad \Omega' = \rho\omega + \sigma\omega';$$

$$(4) \qquad \mu\sigma - \rho\nu = \pm 1$$

essendo μ, ν, ρ *e* σ *numeri interi e reali.*

Infatti è chiaro che perchè sia:

$$(5) \qquad M\Omega + N\Omega' + \alpha = m\omega + n\omega' + \alpha,$$

è necessario e sufficiente che siano sodisfatte le equazioni:

$$(6) \qquad M\mu + N\rho = m, \qquad M\nu + N\sigma = n.$$

Ora qualunque siano i numeri interi M ed N è chiaro che esisteranno valori interi per m ed n che sodisfaranno le equazioni (6) e quindi la equazione (5), e a cagione della equazione (4), qualunque siano i valori interi di m ed n, esisteranno anche valori interi di M ed N che sodisfaranno le (6) e quindi la (5). Dunque ogni punto

che è indice di una delle quantità (1) è indice anche di una delle quantità (2), e viceversa.

Teorema 3. *I valori dei determinanti degl'indici delle quantità* (1) *e* (2), *quando sussistono le relazioni* (3) *e* (4), *sono eguali e di segno contrario, secondo che nel secondo membro della equazione* (4) *si ha il segno positivo o il negativo.*

Infatti, il determinante degli indici del sistema (2), a cagione delle equazioni (3) e (1'), sarà:

$$\begin{vmatrix} \mu a + \nu c\,, & \mu b + \nu d \\ \rho a + \sigma c\,, & \rho b + \sigma d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu & \nu \\ \rho & \sigma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \pm (ad - bc)\;;$$

onde risulta evidente il teorema che volevamo dimostrare.

Pertanto dato un sistema di punti che siano tutti intersezioni di due sistemi di rette parallele ed equidistanti tra loro, si potranno riguardare sempre come indici di tutte le quantità della forma (2), e Ω e Ω' si potranno sempre prendere in modo che il determinante, e quindi il coefficiente d'i nel rapporto $\frac{\Omega'}{\Omega}$ sia positivo.

È chiaro che se $\mathrm{F}(z)$ è una funzione intera, che ha per radici tutte e sole le quantità della forma (1), le tre funzioni:

$$\mathrm{F}(z),\ \ \mathrm{F}(z+\omega),\ \ \mathrm{F}(z+\omega'),$$

avranno le medesime radici, e quindi non potranno differire altro che per fattori, i quali non abbiano radici finite. Ma è impossibile che siano tra loro eguali, come risulta dal seguente:

Teorema 4. *Una funzione intera* $\mathrm{F}(z)$, *che è doppiamente periodica, ossia che sodisfa a due equazioni:*

$$(a)\qquad \mathrm{F}(z+\omega) = \mathrm{F}(z)\,, \qquad\qquad (b)\qquad \mathrm{F}(z+\omega') = \mathrm{F}(z)\,,$$

dove il rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$ *non è reale, non è una funzione di* z, *ma una costante.*

Infatti, se $\mathrm{F}(z)$ sodisfa alle due equazioni (a) e (b) è chiaro che prenderà i medesimi valori nei punti corrispondenti dei parallelogrammi elementari, e quindi non potrà prendere per qualunque valore di z, valori differenti da quelli che prende nei punti di un solo parallelogrammo elementare. Ma ogni funzione intera che non è costante diviene infinita per $z = \infty$ (Intr. n.° 3); quindi $\mathrm{F}(z)$, se non fosse una costante, dovrebbe diventare infinita per un valore di z, che ha l'indice in un parallelogrammo elementare qualunque, cioè per un valore finito di z, e non sarebbe una funzione intera.

4.

Le funzioni intere che avranno per indici delle loro radici i punti d'intersezione di due sistemi di rette parallele ed equidistanti tra loro, per quello che abbiamo dimostrato nel numero precedente, avranno per radici le quantità della forma:

$$(1) \qquad m\omega + n\omega' + \alpha$$

dove nel rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$ il coefficiente d'i è differente da zero e positivo, ed m e n sono interi reali.

Consideriamo prima quelle funzioni intere per le quali $\alpha = 0$, ed n è sempre negativo, ossia che hanno gl'indici delle loro radici tutti situati da una medesima parte di una retta AB che passa per l'origine. Queste funzioni che hanno per radici tutte e sole le quantità:

$$(2) \qquad \pm m\omega - n\omega'$$

dove m ed n sono interi, reali e positivi non potranno differire tra loro altro che per una funzione intera che non ha radici finite. Basterà quindi considerarne una sola.

La funzione intera:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\omega}$$

ha per radici tutte e sole le quantità della forma:

$$\pm m\omega.$$

La funzione intera:

$$\frac{e^{\frac{\pi i z}{\omega}} \operatorname{sen}\frac{\pi(n\omega' + z)}{\omega}}{\operatorname{sen}\frac{\pi n\omega'}{\omega}} = \frac{1 - e^{\frac{2\pi i n\omega'}{\omega} + \frac{2\pi i z}{\omega}}}{1 - e^{\frac{2n\pi i\omega'}{\omega}}}$$

ha per radici tutte e sole le quantità:

$$\pm m\omega - n\omega',$$

nelle quali n ha un determinato valore, ed m prende tutti i valori interi, reali e positivi (num.° 2. formula 17).

Onde il prodotto:

$$(3) \qquad C \operatorname{sen}\frac{\pi z}{\omega} \prod_1^\infty \left(\frac{1 - e^{\frac{2n\pi i\omega'}{\omega} + \frac{2\pi i z}{\omega}}}{1 - e^{\frac{2n\pi i\omega'}{\omega}}} \right)$$

se è convergente per qualunque valore finito di z, sarà una funzione intera che avrà per radici tutte e sole le quantità (2).

Questo prodotto è sempre convergente, perchè la serie:

$$\sum_0^\infty e^{\frac{2n\pi i\omega'}{\omega}}$$

è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini. Infatti, abbiamo:

$$\frac{\omega'}{\omega} = a + bi\,,$$

dove b è differente da zero, e positivo; quindi

$$e^{\frac{\pi i\omega'}{\omega}} = e^{-\pi b}\, e^{\pi i a}$$

e

$$\operatorname{mod} e^{\frac{\pi i\omega'}{\omega}} = e^{-\pi b} < 1.$$

Poniamo:

$$q = e^{\frac{\pi i\omega'}{\omega}}\,,$$

e prendiamo la costante C in modo che la funzione (3) divisa per $\frac{z}{\omega}$, e fatto $z=0$, dia per valore l'unità, cioè prendiamo $C = \frac{1}{\pi}$, e poniamo:

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{et}\frac{z}{\omega} = \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\omega}\prod_1^\infty \frac{1 - q^{2n}\, e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}}{1 - q^{2n}}\,,$$

ossia:

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{et} z = \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\pi z\prod_1^\infty \frac{1 - q^{2n}\, e^{2\pi i z}}{1 - q^{2n}}\,.$$

Indichiamo questa funzione colla notazione $\operatorname{et} z$, perchè avendo il sistema delle sue radici eguale alla metà del sistema delle radici di una funzione che suole indicarsi colla lettera Θ, la chiameremo *emiteta*.

Sono facili a dimostrarsi le equazioni:

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{et}(z+1) = -\operatorname{et} z\,,$$

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{et}\left(z + \frac{\omega'}{\omega}\right) = \frac{i}{2}\, e^{-\pi i\left(z + \frac{\omega'}{\omega}\right)} \frac{\operatorname{et}(z)}{\operatorname{sen}\pi z} = \frac{\operatorname{et} z}{q(1 - e^{2\pi i z})}\,,$$

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{et}(0) = 0\,,$$

$$(9) \qquad \lim_{z=0} \frac{\operatorname{et} z}{z} = 1$$

le quali sono le caratteristiche della funzione, cioè sono l'equazioni necessarie e sufficienti alla sua definizione.

Infatti, se una funzione intera $F(z)$ sodisfa all'equazioni:

$$(a) \qquad F(z+1) = -F(z)\,, \qquad\qquad (b) \qquad F(z+\varpi) = \frac{i}{2}\, e^{-\pi i(z+\varpi)} \frac{F(z)}{\operatorname{sen} \pi z}\,,$$

$$(c) \qquad F(0) = 0\,, \qquad\qquad (d) \qquad \lim \frac{F(z)}{z} = 1\,,$$

sarà identica alla funzione $\operatorname{et} z$, nella quale $\omega' = \omega\varpi$.

Infatti, se la funzione intera $F(z)$ sodisfa all'equazioni (a), (b), (c) avrà per radici tutte le quantità della forma:

$$\pm m - n\frac{\omega'}{\omega}\,,$$

cioè tutte le radici della funzione $\operatorname{et} z$; avremo dunque (Introd. n.° 3):

$$(e) \qquad F(z) = \varphi(z) \operatorname{et} z\,,$$

dove $\varphi(z)$ è una funzione intera di z. Sostituendo il valore (e) nell'equazioni (a) e (b) e ponendo mente all'equazioni (6) e (7), si ottiene:

$$\varphi(z+1) = \varphi(z)\,, \qquad \varphi(z+\varpi) = \varphi(z)\,;$$

e quindi per il teorema 4 del n.° 3, $\varphi(z)$ non è una funzione di z, ma una costante C, e abbiamo:

$$F(z) = C \operatorname{et} z.$$

Sostituendo nell'equazione (c) si ottiene $C = 1$, e quindi:

$$F(z) = \operatorname{et} z\,;$$

come volevamo dimostrare.

La funzione $e^{\pi i z} \operatorname{et} z$ è intera non solo rispetto alla variabile z, ma anche rispetto alla quantità $e^{2\pi i z}$, quindi potrà esprimersi per una serie di potenze positive e intere di questa quantità, che sarà sempre convergente; cioè avremo:

$$e^{\pi i z} \operatorname{et} z = \sum_0^\infty A_n\, e^{2n\pi i z}\,.$$

A cagione della equazione (7) avremo:

$$\sum_0^\infty A_n\, q^{2n}\, e^{2n\pi i z} = \frac{\sum_0^\infty A_n\, e^{2n\pi i z}}{(1 - e^{2\pi i z})}\,;$$

onde:

$$\sum_0^\infty \left(A_n(1 - q^{2n}) + A_{n-1}\, q^{2n-2}\right) e^{2n\pi i z} = 0\,;$$

dalla quale si deduce:

$$A_n = -\frac{A_{n-1}\, q^{2n-2}}{1 - q^{2n}},$$

ossia:

$$A_n = (-1)^n \frac{A_0\, q^{n(n-1)}}{\prod_1^n (1 - q^{2l})},$$

e quindi:

$$e^{\pi i z}\, \mathrm{et}\, z = A_0 \sum_0^\infty \frac{(-1)^n\, q^{n(n-1)}}{\prod_1^n (1 - q^{2l})}\, e^{2n\pi i z}.$$

Ponendo $z = \infty$, abbiamo, per la equazione (5):

$$A_0 = \frac{1}{\prod_1^\infty (1 - q^{2n})}\,;$$

onde:

$$\mathrm{et}\, z = \frac{1}{\prod_1^\infty (1 - q^{2n})} \sum_1^\infty \frac{(-1)^n\, q^{n(n-1)}}{\prod_1^n (1 - q^{2l})}\, e^{(2n-1)\pi i z}. \tag{10}$$

5.

La funzione intera $\mathrm{et}\,\frac{z}{\omega}$ ha per radici, come abbiamo veduto, tutte e sole le quantità della forma:

$$\pm m\omega - n\omega'\,;$$

la funzione intera $\mathrm{et}\left(-\frac{z}{\omega}\right)$ avrà per radici tutte e sole le quantità della forma:

$$\pm m\omega + n\omega'\,;$$

onde il prodotto:

$$\mathrm{et}\,\frac{z}{\omega}\;\mathrm{et} - \frac{z}{\omega}$$

avrà per radici tutte e sole le quantità della forma:

$$m\omega + n\omega', \tag{1}$$

dove m e n possono essere tanto positivi quanto negativi, e tutte radici semplici, fuori che le quantità della forma $m\omega$, le quali ne saranno tutte radici doppie; ma queste sono radici semplici della funzione intera $\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\omega}$, onde la funzione intera:

$$C\frac{\operatorname{et}\frac{z}{\omega}\operatorname{et}-\frac{z}{\omega}}{\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\omega}}$$

avrà per radici tutte e sole le quantità della forma (1). Prendiamo la costante C in modo che dividendo la funzione per z, e ponendo quindi $z=0$, si ottenga per valore l'unità; cioè prendiamo $C=-\pi\omega$, e poniamo:

$$(2)\qquad \theta(z)=-\pi\omega\frac{\operatorname{et}\frac{z}{\omega}\operatorname{et}-\frac{z}{\omega}}{\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\omega}}=\frac{\pi\omega\operatorname{et}\frac{z}{\omega}\operatorname{et}\left(1-\frac{z}{\omega}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\omega}}.$$

Poichè dalla equazione (7) del n.° 4, si ha:

$$\operatorname{et}\left(\frac{\omega'}{\omega}-\frac{z}{\omega}\right)=\frac{e^{\frac{-\pi i}{\omega}(\omega'-z)}\operatorname{et}\left(-\frac{z}{\omega}\right)}{2i\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\omega}},$$

alla funzione $\theta(z)$ potremo dare anche la forma:

$$(2')\qquad \theta(z)=-2\pi i\omega e^{-\frac{\pi i}{\omega}(z-\omega')}\operatorname{et}\frac{z}{\omega}\operatorname{et}\left(\frac{\omega'}{\omega}-\frac{z}{\omega}\right)$$

$$=2\pi i\omega e^{-\frac{\pi i}{\omega}(z-\omega')}\operatorname{et}\frac{z}{\omega}\operatorname{et}\left(1+\frac{\omega'}{\omega}-\frac{z}{\omega}\right).$$

Osservando l'equazione (6) del numero 4, avremo immediatamente:

$$(3)\qquad \theta(z+\omega)=-\theta(z).$$

Aumentando z della quantità ω', si ottiene:

$$\theta(z+\omega')=-\pi\omega\frac{\operatorname{et}\left(\frac{z}{\omega}+\frac{\omega'}{\omega}\right)\operatorname{et}\left(-\frac{z}{\omega}-\frac{\omega'}{\omega}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{\omega}+\frac{\pi\omega'}{\omega}\right)};$$

ma dall'equazione (7) del numero 4, abbiamo:

$$\mathrm{et}\left(\frac{z}{\omega}+\frac{\omega'}{\omega}\right)=-\frac{e^{-\pi i z}\,\mathrm{et}\frac{z}{\omega}}{2iq\,\mathrm{sen}\frac{\pi z}{\omega}},$$

$$\mathrm{et}\left(-\frac{z}{\omega}-\frac{\omega'}{\omega}\right)=q(1-e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}-\frac{2\pi i\omega'}{\omega}})\,\mathrm{et}\left(-\frac{z}{\omega}\right),$$

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\pi z}{\omega}+\frac{\pi\omega'}{\omega}\right)=\frac{e^{\frac{\pi i}{\omega}(z+\omega')}(1-e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}-\frac{2\pi i\omega'}{\omega}})}{2i},$$

onde :

$$(4)\qquad \theta(z+\omega')=-e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\theta(z).$$

Abbiamo inoltre :

$$(5)\qquad \lim\frac{\theta(z)}{z}=1.$$

L'equazioni (3), (4) e (5) unite all'equazione :

$$(6)\qquad \theta(0)=0,$$

sono le caratteristiche della funzione $\theta(z)$.

Infatti, una funzione intera $\mathrm{F}(z)$ che sodisfa l'equazioni :

(a) $\quad \mathrm{F}(z+\omega)=-\mathrm{F}(z)$, $\qquad$ (b) $\quad \mathrm{F}(z+\omega')=-e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\mathrm{F}(z)$,

(c) $\quad \mathrm{F}(0)=0$, $\qquad$ (d) $\quad \lim\limits_{z=0}\dfrac{\mathrm{F}(z)}{z}=1$,

non può essere altro che la funzione $\theta(z)$.

Poichè se $\mathrm{F}(z)$ sodisfa l'equazioni (c), (a) e (b) avrà per radici tutte le quantità della forma (1), e quindi sarà :

$$(e)\qquad \mathrm{F}(z)=\varphi(z)\,\theta(z),$$

essendo $\varphi(z)$ una funzione intera. Sostituendo il valore (e) nell' equazioni (a) e (b), abbiamo :

$$\varphi(z+\omega)=\varphi(z),\qquad \varphi(z+\omega')=\varphi(z),$$

onde $\varphi(z)$, per il teorema 4 del n.° 3, è una costante C, e si ha :

$$\mathrm{F}(z)=\mathrm{C}\,\theta(z).$$

*

Sostituendo questo valore nella (d) si ottiene $C = 1$; onde:

$$F(z) = \theta(z)$$

come volevamo dimostrare.

La funzione $\theta(z)$ è una funzione dispari, cioè sodisfa l'equazione:

$$(7) \qquad \theta(-z) = -\theta(z),$$

come risulta immediatamente dalla equazione (2).

Sostituendo nella formula (2) i valori dati dalla formula (4) del numero 4, abbiamo:

$$(8) \qquad \theta(z) = \frac{\omega}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\omega} \prod_1^\infty \frac{\left(1 - q^{2n} e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)\left(1 - q^{2n} e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)}{(1 - q^{2n})^2},$$

ossia:

$$(9) \qquad \theta(z) = \frac{\omega}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\omega} \prod_1^\infty \frac{1 - 2q^{2n} \cos \frac{2\pi z}{\omega} + q^{4n}}{(1 - q^{2n})^2}.$$

6.

Le funzioni intere che hanno per radici tutte e sole le quantità:

$$(1) \qquad m\omega + n\omega' + \alpha,$$

saranno della forma:

$$(2) \qquad \varphi(z)\, \theta(z - \alpha),$$

dove $\varphi(z)$ è una funzione intera che non ha radici finite.

La quantità complessa α può sempre esprimersi per due quantità complesse ω' e ω, se $\frac{\omega'}{\omega}$ non è reale, nel modo seguente:

$$\alpha = \frac{1 - \mu}{2} \omega + \frac{1 - \nu}{2} \omega',$$

dove μ e ν sono due quantità reali. Poichè se

$$\alpha = \rho + \sigma i, \quad \omega = a + bi, \quad \omega' = c + di;$$

e $\frac{\omega'}{\omega}$ non è reale, il determinante $ad - bc$ sarà differente da zero, e quindi l'equazioni simultanee:

$$\rho = \frac{1 - \mu}{2} a + \frac{1 - \nu}{2} c, \qquad \sigma = \frac{1 - \mu}{2} b + \frac{1 - \nu}{2} d,$$

avranno sempre una soluzione, quando vi si riguardino μ e ν come incognite.

Indicando la funzione (2) con $\theta_{\mu,\nu}$, avremo:

$$(3)\qquad \theta_{\mu,\nu}(z) = \varphi(z)\,\theta\left(z + \frac{\mu - 1}{2}\,\omega + \frac{\nu - 1}{2}\,\omega'\right).$$

Determiniamo la funzione intera $\varphi(z)$ in modo che l'equazioni caratteristiche di $\theta_{\mu,\nu}(z)$ siano quelle stesse della funzione $\theta(z)$, che indicheremo con $\theta_{1,1}(z)$, quando $\mu = 1$, e $\nu = 1$, cioè siano le seguenti:

$$(4)\qquad \theta_{\mu,\nu}(z + \omega) = e^{\nu\pi i}\,\theta_{\mu,\nu}(z),$$

$$(5)\qquad \theta_{\mu,\nu}(z + \omega') = e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\mu\omega+\omega')}\,\theta_{\mu,\nu}(z),$$

$$(6)\qquad \theta_{\mu,\nu}\left((\mu - 1)\frac{\omega}{2} + (\nu - 1)\frac{\omega'}{2}\right) = 0,$$

$$(7)\qquad \theta_{\mu,\nu}(0) = 1.$$

Sostituendo il valore (3) nelle equazioni (4) e (5), abbiamo:

$$\varphi(z + \omega) = e^{(\nu-1)\pi i}\,\varphi(z), \qquad \varphi(z + \omega') = e^{(\nu-1)\frac{\pi i\omega'}{\omega}}\,\varphi(z);$$

e ponendo:

$$\varphi(z) = e^{(\nu-1)\frac{\pi i z}{\omega}}\,\psi(z),$$

si ha:

$$\psi(z + \omega) = \psi(z), \qquad \psi(z + \omega') = \psi(z);$$

onde $\psi(z)$ è eguale a una costante C, e

$$\varphi(z) = \mathrm{C}e^{(\nu-1)\frac{\pi i z}{\omega}},$$

$$\theta_{\mu,\nu}(z) = \mathrm{C}e^{(\nu-1)\frac{\pi i z}{\omega}}\,\theta_{1,1}\left(z + \frac{\mu - 1}{2}\,\omega + \frac{\nu - 1}{2}\,\omega'\right).$$

Sostituendo nella (7) si ottiene:

$$\mathrm{C} = \frac{1}{\theta_{1,1}\left((\mu - 1)\frac{\omega}{2} + (\nu - 1)\frac{\omega'}{2}\right)},$$

e quindi:

$$(8)\qquad \theta_{\mu,\nu}(z) = e^{(\nu-1)\frac{\pi i z}{\omega}}\,\frac{\theta_{1,1}\left(z + \frac{\mu - 1}{2} + \omega\,\frac{\nu - 1}{2}\,\omega'\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\mu - 1}{2}\,\omega + \frac{\nu - 1}{2}\,\omega'\right)}.$$

La equazione caratteristica (7) per le funzioni $\theta_{\mu,\nu}(z)$, nelle quali μ e ν sono ambedue dispari, non vale, perchè diviene in contradizione colle (6); allora invece abbiamo:

$$(8) \qquad \lim_{z=0} \frac{\theta_{\mu,\nu}(z)}{z} = 1.$$

Le due equazioni caratteristiche (4) e (5) si possono comprendere nella sola seguente:

$$(9) \qquad \theta_{\mu,\nu}(z + r\omega + s\omega') = (-1)^{r\nu+\mu s} e^{-\frac{\pi i s}{\omega}(2z + s\omega')} \theta_{\mu,\nu}(z),$$

dove r ed s sono due interi reali qualunque.

Teorema. *Le funzioni* $\theta_{\mu,\nu}(z)$, *nelle quali i valori di* μ, ν *sono congrui rispetto al modulo* 2, *sono identiche.*

Infatti, due funzioni:

$$\theta_{\mu,\nu}(z)\ , \qquad \theta_{\mu+2r,\,\nu+2s}(z)$$

dove r e s sono interi e reali hanno le medesime caratteristiche.

La caratteristica (6) rimane evidente che è la medesima per ambedue, se si pone mente che le due funzioni hanno le medesime radici. La (7) e la (8) rimangono invariate quando si aumenti μ di $2r$ e ν di $2s$. La caratteristica (9) finalmente, non muta per questo cangiamento, il quale non fa che aumentare l'esponente di e di un multiplo di $2\pi i$.

Pertanto le funzioni $\theta_{\mu,\nu}(z)$ nelle quali μ e ν sono interi, si riducono soltanto a quattro funzioni distinte:

$$\theta_{1,1}(z)\ , \qquad \theta_{1,0}(z)\ , \qquad \theta_{0,1}(z)\ , \qquad \theta_{0,0}(z).$$

Queste funzioni le chiameremo funzioni Jacobiane, perchè non differiscono altro che per fattori indipendenti da z da quelle che *Jacobi* introdusse nell'Analisi.

7.

Dalle equazioni (8) del numero precedente si deduce facilmente la equazione:

$$(1) \qquad \theta_{\mu+\mu',\,\nu+\nu'}(z)$$

$$= \frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\mu-1}{2}\omega + \frac{\nu-1}{2}\omega'\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\mu'+\mu-1}{2}\omega + \frac{\nu'+\nu-1}{2}\omega'\right)} e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(\nu' z - \frac{(\nu-1)}{2}(\mu'\omega + \nu'\omega')\right)} \theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\mu'}{2}\omega + \frac{\nu'}{2}\omega'\right),$$

la quale insieme colla (8) serve ad esprimere tre qualunque delle funzioni Jacobiane

per mezzo della quarta e si hanno le seguenti formule:

(2) $$\theta_{1,0}(z) = e^{\frac{\pi i z}{\omega}} \frac{\theta_{1,1}\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right)},$$ (3) $$\theta_{0,1}(z) = \frac{\theta_{1,1}\left(z + \frac{\omega}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)},$$

(4) $$\theta_{0,0}(z) = e^{\frac{\pi i z}{\omega}} \frac{\theta_{1,1}\left(z + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right)}:$$

(5) $$\theta_{1,1}(z) = -\theta_{1,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right) e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)} \theta_{1,0}\left(z + \frac{\omega'}{2}\right).$$

(6) $$\theta_{0,1}(z) = -\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right)} \theta_{1,0}\left(z + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right),$$

(7) $$\theta_{0,0}(z) = -\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)} e^{\frac{\pi i}{2}} \theta_{1,0}\left(z + \frac{\omega}{2}\right);$$

(8) $$\theta_{1,1}(z) = -\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right) \theta_{0,1}\left(z + \frac{\omega}{2}\right),$$

(9) $$\theta_{1,0}(z) = -\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right)} e^{\frac{\pi i z}{\omega}} \theta_{0,1}\left(z + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right),$$

(10) $$\theta_{0,0}(z) = \frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)} e^{\frac{\pi i z}{\omega}} \theta_{0,1}\left(z + \frac{\omega'}{2}\right),$$

(11) $$\theta_{1,1}(z) = -\theta_{1,1}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right) e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(z + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right)} \theta_{0,0}\left(z + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right),$$

$$(12)\qquad \theta_{1,0}(z)=\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right)}\,e^{\frac{\pi i}{2}}\,\theta_{0,0}\left(z+\frac{\omega}{2}\right),$$

$$(13)\qquad \theta_{0,1}(z)=\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}\,e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}\,\theta_{0,0}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right).$$

Prendendo la formula (2) del numero (5), e sostituendo il valore di $\theta_{1,1}(z)$ dato dalla medesima nelle equazioni (2), (3) e (4), abbiamo:

$$(14)\qquad \theta_{1,1}(z)=-\frac{\pi\omega\ \mathrm{ct}\,\frac{z}{\omega}\ \mathrm{ct}-\frac{z}{\omega}}{\mathrm{sen}\,\frac{\pi z}{\omega}},$$

$$(15)\qquad \theta_{1,0}(z)=\mathrm{sen}\,\frac{\pi\omega'}{2\omega}\,e^{\frac{\pi i z}{\omega}}\,\frac{\mathrm{ct}\left(\frac{z}{\omega}+\frac{\omega'}{2\omega}\right)\mathrm{ct}\left(-\frac{z}{\omega}-\frac{\omega'}{2\omega}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi z}{\omega}+\frac{\pi\omega'}{2\omega}\right)\mathrm{ct}\,\frac{\omega'}{2\omega}\,\mathrm{ct}\left(-\frac{\omega'}{2\omega}\right)},$$

$$(16)\qquad \theta_{0,1}(z)=\frac{\mathrm{ct}\left(\frac{z}{\omega}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{ct}\left(-\frac{z}{\omega}-\frac{1}{2}\right)}{\cos\frac{\pi z}{\omega}\,\mathrm{ct}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{ct}-\frac{1}{2}},$$

$$(17)\qquad \theta_{0,0}(z)=\cos\frac{\pi i\omega'}{2\omega}\,e^{\frac{\pi i z}{\omega}}\,\frac{\mathrm{ct}\left(\frac{z}{\omega}+\frac{\omega'}{2\omega}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{ct}\left(-\frac{z}{\omega}-\frac{\omega'}{2\omega}-\frac{1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi z}{\omega}+\frac{\pi\omega'}{2\omega}\right)\mathrm{ct}\left(\frac{\omega'}{2\omega}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{ct}\left(-\frac{\omega'}{2\omega}-\frac{1}{2}\right)}.$$

Mediante l'equazioni (2), (3) e (4), richiamando le formule (8) e (9) del numero (6), abbiamo:

$$(18)\qquad \theta_{1,1}(z)=\frac{\omega}{\pi}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi z}{\omega}\prod_{1}^{\infty}\frac{\left(1-q^{2n}e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)\left(1-q^{2n}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)}{(1-q^{2n})^2}$$

$$=\frac{\omega}{\pi}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi z}{\omega}\prod_{1}^{\infty}\frac{\left(1-2q^{2n}\cos\frac{2\pi z}{\omega}+q^{4n}\right)}{(1-q^{2n})^2},$$

$$(19)\qquad \theta_{1,0}(z) = \prod_{0}^{\infty} \frac{\left(1 - q^{2n+1}\, e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)\left(1 - q^{2n+1}\, e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)}{(1 - q^{2n+1})^2}$$

$$= \prod_{0}^{\infty} \frac{\left(1 - 2q^{2n+1} \cos\frac{2\pi z}{\omega} + q^{4n+2}\right)}{(1 - q^{2n+1})^2},$$

$$(20)\qquad \theta_{0,1}(z) = \cos\frac{\pi z}{\omega} \prod_{1}^{\infty} \frac{\left(1 + q^{2n}\, e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)\left(1 + q^{2n}\, e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)}{(1 + q^{2n})^n}$$

$$= \cos\frac{\pi z}{\omega} \prod_{1}^{\infty} \frac{\left(1 + 2q^{2n} \cos\frac{2\pi z}{\omega} + q^{4n}\right)}{(1 + q^{2n})^2},$$

$$(21)\qquad \theta_{0,0}(z) = \prod_{0}^{\infty} \frac{\left(1 + q^{2n+1}\, e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)\left(1 + q^{2n+1}\, e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)}{(1 + q^{2n+1})^2}$$

$$= \prod_{0}^{\infty} \frac{\left(1 + 2q^{2n+1} \cos\frac{2\pi z}{\omega} + q^{4n+2}\right)}{(1 + q^{2n+1})^2}.$$

Da queste equazioni si deduce immediatamente che le funzioni $\theta_{\mu,\nu}(z)$ sono pari se $\mu\nu \equiv 0$ (mod. 2), sono dispari se $\mu\nu \equiv 0$ (mod. 2); ossia:

$$(22)\qquad \theta_{\mu,\nu}(-z) = (-1)^{\mu\nu}\, \theta_{\mu,\nu}(z) .$$

8.

Le quattro funzioni $\theta_{\mu,\nu}$ contengono due soli argomenti $\frac{z}{\omega}$ e $\frac{\omega'}{\omega}$; quindi tra i valori delle medesime corrispondenti allo stesso sistema di valori dei due argomenti dovranno esistere due sole equazioni distinte. Queste sono le due equazioni algebriche seguenti:

$$(1)\qquad \theta^2_{1,0}(z) = \theta^2_{0,1}(z) + \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}\, \theta^2_{1,1}(z),$$

$$(2)\qquad \theta^2_{1,0}(z) = \theta^2_{0,0}(z) + \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}\, \theta^2_{1,1}(z).$$

Per dimostrare queste equazioni osserviamo che dall'equazione (9) del numero 6, si deduce:

$$\theta_{1,1}\left(r\omega + s\omega' + \frac{\omega}{2}\right) = (-1)^{r+s} e^{-\frac{s\pi i}{\omega}(2z + s\omega')} \theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\theta_{1,0}\left(r\omega + s\omega' + \frac{\omega}{2}\right) = (-1)^{s} e^{-\frac{s\pi i}{\omega}(2z + s\omega')} \theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right);$$

onde:

$$\theta_{1,0}\left(2r\omega + s\omega' + \frac{\omega}{2}\right) - \frac{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \theta_{1,1}\left(2r\omega + s\omega' + \frac{\omega}{2}\right) = 0,$$

$$\theta_{1,0}\left((2r+1)\omega + s\omega' + \frac{\omega}{2}\right) + \frac{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \theta_{1,1}\left((2r+1)\omega + s\omega' + \frac{\omega}{2}\right) = 0.$$

Dunque la funzione:

$$\theta^2_{1,0}(z) - \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \theta^2_{1,1}(z)$$

ha per radici tutte le quantità della forma:

$$r\omega + s\omega' + \frac{\omega}{2},$$

dove r ed s sono numeri interi e reali qualunque, e quindi sarà divisibile per la funzione $\theta_{0,1}(z)$ che ha per radici tutte e sole queste quantità, e avremo:

$$\theta^2_{1,0}(z) - \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \theta^2_{1,1}(z) = \theta_{0,1}(z)\, \varphi(z),$$

dove $\varphi(z)$ è una funzione intera.

Ora da questa equazione, ponendo mente alla equazione (9) del numero 6, si ha:

$$\varphi(z+\omega) = -\varphi(z), \quad \varphi(z+\omega') = e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')} \varphi(z), \quad \varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0, \quad \varphi(0) = 1;$$

che sono le quattro equazioni caratteristiche della funzione $\theta_{0,1}(z)$; dunque $\varphi(z) = \theta_{0,1}(z)$, e abbiamo:

$$\theta^2_{1,0}(z) = \theta^2_{0,1}(z) + \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}\theta^2_{1,1}(z),$$

come volevamo dimostrare.

Dall'equazione (9) del numero 6, si ricava ancora:

$$\theta_{1,1}\left(r\omega + s\omega' + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = (-1)^{r+s} e^{-\frac{s\pi i}{\omega}(2z + s\omega')} \theta_{1,1}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right),$$

$$\theta_{1,0}\left(r\omega + s\omega' + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = (-1)^{s} e^{-\frac{s\pi i}{\omega}(2z + s\omega')} \theta_{1,0}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right);$$

onde:

$$\theta_{1,0}\left(2r\omega + s\omega' + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) - \frac{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)}\theta_{1,1}\left(2r\omega + s\omega' + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = 0,$$

$$\theta_{1,0}\left((2r+1)\omega + s\omega' + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) + \frac{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)}\theta_{1,1}\left((2r+1)\omega + s\omega' + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = 0.$$

Dunque la funzione intera:

$$\theta^2_{1,0}(z) - \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)}\theta^2_{1,1}(z)$$

ha per radici tutte le quantità della forma:

$$r\omega + s\omega' + \frac{\omega + \omega'}{2},$$

le quali sono le sole radici di $\theta_{0,0}(z)$: e quindi sarà divisibile per $\theta_{0,0}(z)$, e avremo:

$$\theta^2_{1,0}(z) - \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)}\theta^2_{1,1}(z) = \varphi(z)\,\theta_{0,0}(z),$$

dove $\varphi(z)$ è funzione intera. Ma da questa si deduce facilmente:

$$\varphi(z + (\omega = \varphi(z), \quad \varphi(z + \omega') = e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\varphi(z), \quad \varphi\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right) = 0, \quad \varphi(0) = 1;$$

*

equazioni caratteristiche di $\theta_{0,0}(z)$: dunque $\varphi(z) = \theta_{0,0}(z)$, e quindi :

$$\theta^2_{1,0}(z) = \theta^2_{0,0}(z) + \frac{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)} \theta^2_{1,1}(z) ,$$

come volevamo dimostrare.

Ora osserviamo che i due argomenti delle funzioni Jacobiane sono i rapporti di z e di ω' alla quantità ω; quindi per ω si potrà prendere una quantità qualunque, purchè si varino contemporaneamente z ed ω' in modo che i loro rapporti non mutino. Infatti, ponendo $\frac{\omega'}{\omega} = \varpi$, dall'equazioni (18), (19), (20) e (21) del numero 7, abbiamo :

$$(3) \qquad \theta_{1,1}(z, \varpi, \omega_1) = \frac{\omega}{\omega_1} \theta_{1,1}\left(\frac{z\omega_1}{\omega}, \varpi, \omega\right),$$

$$(4) \qquad \theta_{\mu,\nu}(z, \varpi, \omega_1) = \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{z\omega_1}{\omega}, \varpi, \omega\right), \text{ quando } \mu\nu = 0 .$$

Potremo dunque disporre della quantità ω come meglio ci conviene, e stabilire tra ω e il rapporto ϖ, una relazione qualunque. Prendiamo questa relazione in modo da rendere più semplice la equazione (1); cioè prendiamo la relazione :

$$(5) \qquad \theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

la quale, sostituendo i valori dati dall'equazioni (18) e (19) del n.° 7, dà :

$$(6) \qquad \frac{\omega}{\pi} = \prod_1^\infty \frac{(1 + q^{2n-1})^2(1 - q^{2n})^2}{(1 - q^{2n-1})^2(1 + q^{2n})^2}.$$

Con questa relazione tra ω e $\frac{\omega'}{\omega}$, la equazione (1) diviene :

$$(7) \qquad \theta^2_{1,0}(z) = \theta^2_{0,1}(z) + \theta^2_{1,1}(z).$$

Poniamo quindi :

$$(8) \qquad \frac{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)} = k ,$$

e la (2) diverrà :

$$(9) \qquad \theta^2_{1,0}(z) = \theta^2_{0,0}(z) + k^2\theta^2_{1,1}(z).$$

La quantità k, sostituendo i valori delle funzioni Jacobiane dati dalle equazioni (18) e (19) del n.° 7; è espressa in funzione di q dalla formula :

$$(10)\qquad k = 4\sqrt{q}\,\prod_{1}^{\infty}\frac{(1+q^{2n})^4}{(1+q^{2n-1})^4},$$

e suol chiamarsi *modulo* delle funzioni Jacobiane.

Dalla equazione (9), ponendovi $z=\frac{\omega}{2}$, si ricava:

$$1-k^2=\frac{\theta^2_{0,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$

Se prendiamo la relazione:

$$(11)\qquad k^2+k'^2=1,$$

avremo:

$$(12)\qquad k'=\frac{\theta_{0,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)};$$

e sostituendo i valori dati dalle equazioni (19) e (21) del n.° 7:

$$(13)\qquad k'=\prod_{1}^{\infty}\frac{(1-q^{2n-1})^4}{(1+q^{2n-1})^4}.$$

La quantità k' suol chiamarsi *modulo complementare* delle funzioni Jacobiane.

Dall'equazioni (7), (9) e (11) si deduce:

$$(14)\qquad \theta^2_{0,0}(z)=k'^2\,\theta^2_{1,0}(z)+k^2\,\theta^2_{0,1}(z),$$

$$(15)\qquad \theta^2_{0,0}(z)=\theta^2_{0,1}(z)+k'^2\,\theta^2_{1,1}(z).$$

9.

Esprimiamo ora i valori delle funzioni Jacobiane corrispondenti ai valori $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega+\omega'}{2}$ della variabile z.

Dall'equazioni (19) e (21) del n.° 7, si ottiene:

$$\theta_{0,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)=1,$$

Da queste, e dall'equazioni (5) e (12) del n.° 8, abbiamo:

$$(1)\quad \theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{k'}},\qquad (2)\quad \theta_{0,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{k'},\qquad (3)\quad \theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{k'}}.$$

Dall'equazioni (19) e (20) del n.° 7, si ricava:

$$\theta_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)\theta_{0,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=i\sqrt{q}\,,$$

dalla quale, dalla equazione (8) e dalla (7) dove sia posto $\frac{\omega+\omega'}{2}$ in luogo di z, si deduce:

$$(4)\qquad \theta_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\sqrt{\frac{1}{kk'}},\qquad (5)\qquad \theta_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\sqrt{\frac{k}{k'}},$$

$$(6)\qquad \theta_{0,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\frac{}{\sqrt[4]{q}}\sqrt{\frac{k'}{k}}.$$

Dalle formule (2), (3) e (4) del numero 7, si deduce finalmente

$$(7)\qquad \theta_{1,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{i}{\sqrt[4]{q}}\sqrt{\frac{1}{k}},\qquad (8)\qquad \theta_{0,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\sqrt{\frac{1}{k}},$$

$$(9)\qquad \theta_{0,0}\left(\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\sqrt{k}\,.$$

Dalle formule (2) e (2') del numero 5, mediante i valori (1), (4), (7), si ottiene:

$$(10)\qquad \mathrm{et}\,\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{\pi\omega}\,\sqrt[4]{k'}},\qquad (11)\qquad \mathrm{et}\,\frac{\omega'}{2\omega}=\frac{i}{\sqrt{2\pi\omega}\,\sqrt[4]{q}\,\sqrt[8]{q^3}},$$

$$(12)\qquad \mathrm{et}\,\frac{\omega'+\omega}{2\omega}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}\,\sqrt[4]{kk'}\,\sqrt[8]{q^3}}.$$

Ponendo:

$$\mathrm{A}_0=\prod_1^\infty(1-q^{2n}),\qquad \mathrm{A}_1=\prod_1^\infty(1-q^{2n-1}),$$

$$\mathrm{B}_0=\prod_1^\infty(1+q^{2n}),\qquad \mathrm{B}_1=\prod_1^\infty(1+q^{2n-1});$$

abbiamo:

$$\mathrm{et}\,\frac{1}{2}=\frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{B}_0}{\mathrm{A}_0},\qquad \mathrm{et}\,\frac{\omega'}{2\omega}=\frac{i}{2\pi\sqrt{q}}\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_0},\qquad \mathrm{et}\,\frac{\omega'+\omega}{2\omega}=\frac{1}{2\pi\sqrt{q}}\frac{\mathrm{B}_1}{\mathrm{A}_0};$$

onde:

$$\mathrm{B}_0=\mathrm{A}_0\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}\,\frac{1}{\sqrt[4]{k'}},\qquad \mathrm{A}_1=\frac{\mathrm{A}_0\sqrt{2\pi}\,\sqrt[8]{q}}{\sqrt{\omega}\,\sqrt[4]{k}},\qquad \mathrm{B}_1=\mathrm{A}_0\frac{\sqrt{2\pi}\,\sqrt[8]{q}}{\sqrt{\omega}\,\sqrt[4]{kk'}};$$

ma:

$$\mathrm{A}_0\,\mathrm{B}_0\,\mathrm{A}_1\,\mathrm{B}_1=\mathrm{A}_0\,,\qquad \mathrm{B}_0\,\mathrm{A}_1\,\mathrm{B}_1=1;$$

onde:

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{\mathrm{A}_0^2}=2\mathrm{A}_0\dfrac{\pi}{\omega}q^{\frac{1}{4}}\sqrt{\dfrac{\pi}{\omega kk'}}, & \dfrac{1}{\mathrm{B}_0^2}=2\mathrm{A}_0\,q^{\frac{1}{4}}\sqrt{\dfrac{\pi}{\omega k}}, \\ \dfrac{1}{\mathrm{A}_1^2}=\mathrm{A}_0\sqrt{\dfrac{\pi}{\omega k'}}, & \dfrac{1}{\mathrm{B}_1^2}=\mathrm{A}_0\sqrt{\dfrac{\pi}{\omega}}. \end{array}\right.$$

Sostituendo i valori (13) nelle formule (18), (19), (20) e (21) del numero 7, abbiamo

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \theta_{1,1}(z) &= 2A_0\, q^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{kk'\omega}} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\omega} \prod_1^\infty \left(1 - 2q^{2n} \cos \frac{2\pi z}{\omega} + q^{4n}\right), \\ \theta_{1,0}(z) &= A_0 \sqrt{\frac{\pi}{k'\omega}} \prod_0^\infty \left(1 - 2q^{2n+1} \cos \frac{2\pi z}{\omega} + q^{4n+2}\right), \\ \theta_{0,1}(z) &= 2A_0\, q^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{k\omega}} \cos \frac{\pi z}{\omega} \prod_1^\infty \left(1 + 2q^{2n} \cos \frac{2\pi z}{\omega} + q^{4n}\right), \\ \theta_{0,0}(z) &= A_0 \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} \prod_0^\infty \left(1 + 2q^{2n+1} \cos \frac{2\pi z}{\omega} + q^{4n+2}\right). \end{aligned}\right.$$

10.

Se nelle formule (14), (15), (16) e (17) del numero 7, sostituiamo alle funzioni $\operatorname{et}\left(\pm \frac{z}{\omega} + \alpha\right)$ le serie di potenze intere di $e^{\frac{\pi i z}{\omega}}$ convergenti per qualunque valore finito di z dato nel n.º 4, e a $\operatorname{sen}\left(\pm \frac{\pi z}{\omega} + \alpha\right)$ il suo valore in esponenziali, essendo i numeratori divisibili per i denominatori, avremo evidentemente in serie convergente per qualunque valore finito di z:

$$\theta_{\mu,\nu}(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{\frac{n\pi i z}{\omega}}.$$

Applicando l'equazione caratteristica (5) del numero 6, si otterrà:

$$A_{n+2} = (-1)^\mu A_n\, q^{n+1},$$

onde:

$$A_{2n} = (-1)^{\mu n} A_0\, q^{n^2}, \quad A_{2n+1} = (-1)^{\mu n} A_1\, q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2};$$

e quindi:

$$\theta_{\mu,\nu}(z) = A_0 \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{\mu n} q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i z}{\omega}} + A_1 \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{\mu n} q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\frac{\pi i z}{\omega}}.$$

Applicando la equazione caratteristica (4) del numero 6, avremo:

$$(1)\qquad \theta_{\mu,\nu}(z) = A_{\mu,\nu} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{\mu n} q^{\left(\frac{2n+\nu}{2}\right)^2} e^{(2n+\nu)\frac{\pi i z}{\omega}}.$$

Poniamo:

$$(2)\qquad \Theta_{\mu,\nu}(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{\mu n} q^{\left(\frac{2n+\nu}{2}\right)^2} e^{(2n+\nu)\frac{\pi i z}{\omega}};$$

ossia:

$$(3)\qquad \Theta_{1,1}(z) = 2i\sum_0^\infty(-1)^n q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\pi z}{\omega},$$

$$(4)\qquad \Theta_{1,0}(z) = 1 + 2\sum_1^\infty(-1)^n q^{n^2}\cos\frac{2n\pi z}{\omega},$$

$$(5)\qquad \Theta_{0,1}(z) = 2\sum_0^\infty q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\cos(2n+1)\frac{\pi z}{\omega},$$

$$(6)\qquad \Theta_{0,0}(z) = 1 + 2\sum_1^\infty q^{n^2}\cos 2n\frac{\pi z}{\omega};$$

avremo:

$$(7)\qquad \theta_{\mu,\nu}(z) = A_{\mu,\nu}\,\Theta_{\mu,\nu}(z),$$

dove $A_{\mu,\nu}$ sarà soltanto funzione di q. Jacobi indicò colla lettera H la funzione $\Theta_{1,1}$ e colla lettera Θ la funzione $\Theta_{1,0}$.

Dalla (2) si deducono immediatamente l'equazioni:

$$(8)\qquad \Theta_{\mu+2r,\nu}(z) = \Theta_{\mu,\nu}(z), \qquad\qquad (9)\qquad \Theta_{\mu,\nu+2r}(z) = (-1)^{r\mu}\,\Theta_{\mu,\nu}(z),$$

$$(10)\qquad \Theta_{\mu+\mu',\nu+\nu'}(z) = e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(\nu' z + \frac{\nu'^2\omega'}{4} - \nu\frac{\mu'\omega}{2}\right)}\,\Theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\mu'\omega}{2} + \frac{\nu'\omega}{2}\right).$$

Dalle formule (2), (3) e (4) del numero 7, sostituendo i valori dati dalle equazioni (1), (4) e (7) del numero 9, abbiamo:

$$(11)\left\{\begin{aligned} &\theta_{1,0}(z) = \frac{q^{\frac14}\sqrt{k}}{i}\,e^{\frac{\pi i z}{\omega}}\,\theta_{1,1}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right), \qquad \theta_{0,1}(z) = \sqrt{k'}\,\theta_{1,1}\left(z+\frac{\omega}{2}\right),\\ &\theta_{0,0}(z) = q^{\frac14}\sqrt{kk'}\,e^{\frac{\pi i z}{\omega}}\,\theta_{1,1}\left(z+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right),\end{aligned}\right.$$

e sostituendo in queste i valori dati dalla equazione (2), osservando la (7), e ponendo:

$$A_{1,1} = \frac{A}{i}\sqrt{\frac{\pi}{kk'\omega}},$$

si ottiene:

$$A_{1,1} = \frac{A}{i}\sqrt{\frac{\pi}{kk'\omega}}, \qquad A_{1,0} = A\sqrt{\frac{\pi}{k'\omega}},$$

$$A_{0,1} = A\sqrt{\frac{\pi}{k\omega}}, \qquad A_{0,0} = A\sqrt{\frac{\pi}{\omega}};$$

e quindi:

$$(12)\quad \begin{cases} \theta_{1,1}(z) = \dfrac{A}{i}\sqrt{\dfrac{\pi}{kk'\omega}}\,\Theta_{1,1}(z)\,, & \theta_{1,0}(z) = A\sqrt{\dfrac{\pi}{k'\omega}}\,\Theta_{1,0}(z)\,, \\ \theta_{0,1}(z) = A\sqrt{\dfrac{\pi}{k\omega}}\,\Theta_{0,1}(z)\,, & \theta_{0,0}(z) = A\sqrt{\dfrac{\pi}{\omega}}\,\Theta_{0,0}(z)\,. \end{cases}$$

Confrontando le equazioni (12) colle (11) del numero 9, e osservando che A ed A_0 sono funzioni soltanto di q, e che quindi il loro rapporto si potrà indicare con $\varphi(q)$, avremo:

$$(13)\quad \begin{cases} \Theta_{1,1}(z) = 2i\varphi(q)q^{\frac{1}{4}}\operatorname{sen}\dfrac{\pi z}{\omega}\prod_{1}^{\infty}\left(1 - 2q^{2n}\cos\dfrac{2\pi z}{\omega} + q^{4n}\right), \\ \Theta_{1,0}(z) = \varphi(q)\prod_{0}^{\infty}\left(1 - 2q^{2n+1}\cos\dfrac{2\pi z}{2\omega} + q^{4n+2}\right), \\ \Theta_{0,1}(z) = 2\varphi(q)q^{\frac{1}{4}}\cos\dfrac{\pi z}{\omega}\prod_{1}^{\infty}\left(1 + 2q^{2n}\cos\dfrac{2\pi z}{\omega} + q^{4n}\right), \\ \Theta_{0,0}(z) = \varphi(q)\prod_{0}^{\infty}\left(1 + 2q^{2n+1}\cos\dfrac{2\pi z}{\omega} + q^{4n+2}\right). \end{cases}$$

Per determinare $\varphi(q)$ osserviamo che ponendo x in luogo di $\dfrac{\pi z}{\omega}$, si hanno le due identità:

$$(14)\quad \sum_{0}^{\infty}(-1)^n q^{n(n+1)}\operatorname{sen}(2n+1)x = \varphi(q)\operatorname{sen} x\prod_{1}^{\infty}(1 - 2q^{2n}\cos 2x + q^{4n}),$$

$$(15)\quad 1 + 2\sum_{1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nx = \varphi(q)\prod_{0}^{\infty}(1 - 2q^{2n+1}\cos 2x + q^{4n+2})\,.$$

Ponendo in queste identità q^2 in luogo di q, moltiplicando una per l'altra, e osservando che si ha identicamente:

$$\prod_{1}^{\infty}(1 - 2q^{4n}\cos 2x + q^{4n})\prod_{0}^{\infty}(1 - 2q^{4n+2}\cos 2x + q^{8n+4})$$
$$= \prod_{1}^{\infty}(1 - 2q^{2n}\cos 2x + q^{4n})\,,$$

si ottiene:

$$\frac{\varphi^2(q^2)}{\varphi(q)}\sum_{0}^{\infty}(-1)^n q^{n(n+1)}\operatorname{sen}(2n+1)x$$
$$= \sum_{0}^{\infty}(-1)^n q^{2n(n+1)}\operatorname{sen}(2n+1)x\left(1 + 2\sum_{1}^{\infty}(-1)^n q^{2n^2}\cos 2nx\right).$$

Riducendo il secondo membro, mediante la formula:

$$2 \operatorname{sen} px \cos qx = \operatorname{sen}(p+q)x + \operatorname{sen}(p-q)x\,,$$

ed eguagliando i termini che contengono sen x, nei due membri, si ha:

$$\frac{\varphi^2(q^2)}{\varphi(q)} = 1 + \sum_1^\infty q^{2n(2n+1)} + \sum_1^\infty q^{2n(2n-1)} = \sum_0^\infty q^{n(n+1)}\,.$$

Ma ponendo nella (14) $x = \frac{\pi}{2}$, abbiamo:

$$\sum q^{n(n+1)} = \varphi(q) \prod_1^\infty (1 + q^{2n})^2.$$

Onde:

$$\frac{\varphi^2(q^2)}{\varphi^2(q)} = \prod_1^\infty (1 + q^{2n})^2\,, \qquad \frac{\varphi(q^2)}{\varphi(q)} = \prod_1^\infty (1 + q^{2n}) = \frac{\prod_1^\infty (1 - q^{4n})}{\prod_1^\infty (1 - q^{2n})}\,,$$

$$\frac{\varphi(q)}{\prod_1^\infty (1 - q^{2n})} = \frac{\varphi(q^2)}{\prod_1^\infty (1 - q^{4n})} = \frac{\varphi(q^4)}{\prod_1^\infty (1 - q^{8n})} = \ldots = \frac{\varphi(q^{2^r})}{\prod_1^\infty (1 - q^{2^r n})}\,.$$

Ma essendo mod $q < 1$, ed avendosi dalla (14) $\varphi(0) = 1$, sarà:

$$\lim_{r=\infty} \frac{\varphi(q^r)}{\prod_1^\infty (1 - q^{2rn})} = 1\,,$$

onde:

$$\varphi(q) = \prod_1^\infty (1 - q^{2n}) = A_0\,.$$

Sostituendo questo valore nelle equazioni (13), e confrontando colle (11) del numero 9, si ottiene:

$$(16) \left\{ \begin{array}{ll} \theta_{1,1}(z) = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\pi}{kk'\omega}}\,\Theta_{1,1}(z)\,, & \theta_{1,0}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{k'\omega}}\,\Theta_{1,0}(z)\,, \\ \theta_{0,1}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{k\omega}}\,\Theta_{0,1}(z)\,, & \theta_{0,0}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}}\,\Theta_{0,0}(z)\,, \end{array} \right.$$

Combinando l'equazioni [16) colle prime nove del numero (9), si hanno i seguenti valori per $\Theta_{\mu,\nu}(0)$, $\Theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $\Theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega'}{2}\right)$, $\Theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)$:

$$(17) \qquad \Theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right) = i\sqrt{\frac{\omega k}{\pi}}\,, \qquad\qquad (18) \qquad \Theta_{1,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right) = -\,q^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\omega k'}{\pi}}\,,$$

(19) $\Theta_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=i\,q^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}$, (20) $\Theta_{1,0}(0)=\sqrt{\frac{\omega k'}{\pi}}$,

(21) $\Theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}$, (22) $\Theta_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=q^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\omega k}{\pi}}$,

(23) $\Theta_{0,1}(0)=\sqrt{\frac{k\omega}{\pi}}$, (24) $\Theta_{0,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right)=q^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}$,

(25) $\Theta_{0,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=iq^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\omega k'}{\pi}}$, (26) $\Theta_{0,0}(0)=\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}$,

(27) $\Theta_{0,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{\frac{k'\omega}{\pi}}$, (28) $\Theta_{0,0}\left(\frac{\omega'}{2}\right)=q^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\omega k}{\pi}}$.

11.

Passiamo ora alla determinazione delle relazioni che esistono tra le funzioni Jacobiane della somma e della differenza di due quantità qualunque, e le funzioni Jacobiane di queste medesime quantità.

Teorema. *Qualunque siano i numeri interi* μ, ν, μ', ν' *e le quantità* z *e* w *abbiamo sempre* :

(1)
$$2\Theta_{\mu,\nu}(z+w)\,\Theta_{\mu',\nu'}(z-w)\,\Theta_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta_{0,\nu-\nu'}(0)$$
$$=P_{0,0}(z)+(-1)^{\mu}P_{0,1}(z)+P_{1,0}(z)+(-1)^{\mu}P_{1,1}(z),$$

dove :

(2)
$$P_{\eta,\varepsilon}(z)=\Theta_{\mu+\eta,\nu+\varepsilon}(z)\,\Theta_{\mu'+\eta,\nu'+\varepsilon}(z)\,\Theta_{\mu-\mu'+\eta,\varepsilon}(w)\,\Theta_{\eta,\nu-\nu'+\varepsilon}(w).$$

Le radici delle funzioni intere $\Theta_{\mu,\nu}(z+w)$ e $\Theta_{\mu',\nu'}(z-w)$ sono rispettivamente le quantità delle due forme :

$$-w+(2r+\mu-1)\frac{\omega}{2}+(2s+\nu-1)\frac{\omega'}{2},$$

$$w+(2r+\mu'-1)\frac{\pi}{2}+(2s+\nu-1)\frac{\omega'}{2}.$$

Ora queste quantità sono tutte anche radici della funzione intera :

(3)
$$F(z)=P_{0,0}(z)+P_{1,0}(z)+(-1)^{\mu}P_{0,1}(z)+(-1)^{\mu}P_{1,1}(z).$$

Infatti, dalla equazione (10) del numero precedente, riducendo colle equazioni (8) e (9) dello stesso numero, abbiamo :

*

$$P_{\eta,\varepsilon}\left(w+(2r+\mu'-1)\frac{\omega}{2}+(2s+\nu'-1)\frac{\omega'}{2}\right)$$

$$=(-1)^{\varepsilon(\mu'-1)}e^{\sigma}\,\Theta_{\mu-\mu'+\eta+1,\,\nu-\nu'+\varepsilon+1}(w)\,\Theta_{\eta+1,\,\varepsilon+1}(w)\,\Theta_{\mu-\mu'+\eta,\,\varepsilon}(w)\,\Theta_{\eta,\,\nu-\nu'+1}(w)\,,$$

$$P_{\eta,\varepsilon}\left(-w+(2r+\mu-1)\frac{\omega}{2}+(2s+\nu-1)\frac{\omega'}{2}\right)$$

$$=(-1)^{\varepsilon(\mu'-1)}e^{\sigma'}\,\Theta_{\mu-\mu'+\eta+1,\,\nu-\nu'+\varepsilon+1}(w)\,\Theta_{\eta+1,\,\varepsilon+1}(w)\,\Theta_{\mu-\mu'+\eta,\,\varepsilon}(w)\,\Theta_{\eta,\,\nu-\nu'+\varepsilon}(w)\,,$$

dove σ e σ' sono quantità indipendenti da ε e da η.

Sostituendo questi valori nel secondo membro della equazione (3), si ottiene in ambedue i casi per risultato il prodotto di un fattore esponenziale moltiplicato per la somma :

$$\begin{aligned}&\Theta_{\mu-\mu'+1,\,\nu-\nu'+1}(w)\,\Theta_{1,1}(w)\,\Theta_{\mu-\mu',0}(w)\,\Theta_{0,\,\nu-\nu'}(w)\\ &+\Theta_{\mu-\mu',\,\nu-\nu'+1}(w)\,\Theta_{0,1}(w)\,\Theta_{\mu-\mu'+1,0}(w')\,\Theta_{1,\,\nu-\nu'}(w)\\ &-\Theta_{\mu-\mu'+1,\,\nu-\nu'}(w)\,\Theta_{1,0}(w)\,\Theta_{\mu-\mu',\,1}(w)\,\Theta_{0,\,\nu-\nu'+1}\\ &-\Theta_{\mu-\mu',\,\nu-\nu'}(w)\,\Theta_{0,0}(w)\,\Theta_{\mu-\mu'+1,\,1}(w)\,\Theta_{1,\,\nu-\nu'+1}(w)\,.\end{aligned}$$

Ora, se $\mu-\mu'$ è pari il primo termine è eguale e di segno contrario al quarto, il secondo è eguale e di segno contrario al terzo; se $\mu-\mu'$ è dispari il primo termine è eguale e di segno contrario al terzo, il secondo è eguale e di segno contrario al quarto; quindi questa somma è sempre identicamente eguale a zero, e abbiamo :

$$F\left(w+(2r+\mu'-1)\frac{\omega}{2}+(2s+\nu'-1)\frac{\omega'}{2}\right)=0\,,$$

$$F\left(-w+(2r+\mu-1)\frac{\omega}{2}+(2s+\nu-1)\frac{\omega'}{2}\right)=0\,,$$

e tutte le radici delle due funzioni intere $\Theta_{\mu,\nu}(z+w)$ e $\Theta_{\mu',\nu'}(z-w)$ sono anche radici della funzione intera $F(z)$.

Dunque, avremo :

$$(4)\qquad F(z)=\varphi(z)\,\Theta_{\mu,\nu}(z+w)\,\Theta_{\mu',\nu'}(z-w)\,,$$

essendo $\varphi(z)$ una funzione intera.

Ora, rammentando l'equazioni caratteristiche delle funzioni Jacobiane, si ottiene :

$$F(z+\omega)=(-1)^{\nu+\nu'}F(z)\,,\qquad F(z+\omega')=(-1)^{\mu+\mu'}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(2z+\omega')}F(z)\,,$$

nelle quali sostituendo il valore (4), e riducendo coll'equazioni caratteristiche delle funzioni Jacobiane, abbiamo :

$$\varphi(z+\omega)=\varphi(z)\,,\qquad \varphi(z+\omega')=\varphi(z),$$

e quindi $\varphi(z)$ eguale a una costante C; e

$$(5) \qquad F(z) = C\,\Theta_{\mu,\nu}(z+w)\,\Theta_{\mu',\nu'}(z-w).$$

Per determinare la costante C, poniamo nella equazione (5):

$$w = 0\,, \quad z = \mu\frac{\omega}{2} + \nu'\frac{\omega'}{2}\,,$$

Poichè dalla equazione (10) del numero precedente, si ottiene:

$$P_{\eta,\epsilon}\left(\mu\frac{\omega}{2} + \nu'\frac{\omega'}{2}\right) = (-1)^{\epsilon\mu+\nu'(\mu-\mu')}\, e^{-\frac{\pi i}{2\omega}\left(\nu'^2\omega' - \mu(\nu+\nu')\omega\right)}\Theta^2_{\mu-\mu'+\eta,\epsilon}(0)\,\Theta_{\eta,\nu-\nu'+\epsilon}(0)$$

e

$$\Theta_{\mu,\nu}\left(\mu\frac{\omega}{2} + \nu'\frac{\omega'}{2}\right)\Theta_{\mu',\nu'}\left(\mu\frac{\omega}{2} + \nu'\frac{\omega'}{2}\right) = (-1)^{\nu'(\mu-\mu')}\, e^{-\frac{\pi i}{2\omega}\left(\nu'^2\omega' - \mu(\nu+\nu')\omega\right)}\Theta_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta_{0,\nu-\nu'}(0)$$

avremo:

$$C\,\Theta_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta_{0,\nu-\nu}{}'(0) = \Theta^2_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta^2_{0,\nu-\nu'}(0) + \Theta^2_{\mu-\mu'+1,0}(0)\,\Theta^2_{1,\nu-\nu'}(0)$$
$$+ \Theta^2_{\mu-\mu',1}(0)\,\Theta^2_{0,\nu-\nu+1}(0) + \Theta^2_{\mu-\mu'+1,1}(0)\,\Theta^2_{1,\nu-\nu'+1}(0).$$

Ora se $\mu - \mu' = 1$, $\nu - \nu' = 1$, si annullano il secondo e il terzo termine, e il primo è eguale al quarto; se $\mu - \mu' = 1$, $\nu - \nu' = 0$, si annullano il terzo e il quarto termine, e il primo è eguale al secondo; se $\mu - \mu' = 0$, $\nu - \nu' = 1$, si annullano il secondo e il quarto termine, e il primo è eguale al terzo. Dunque in questi tre casi, abbiamo:

$$C\Theta_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta_{0,\nu-\nu'}(0) = 2\Theta^2_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta^2_{0,\nu-\nu'}(0)\,,$$

ossia

$$C = 2\Theta_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta_{0,\nu-\nu'}(0)\,.$$

Se poi $\mu - \mu' = 0$ e $\nu - \nu' = 0$, il solo quarto termine si annulla, e si ha:

$$C\,\Theta^2_{0,0}(0) = \Theta^4_{0,0}(0) + \Theta^4_{0,0}(0) + \Theta^4_{0,1}(0).$$

Ma dall'equazioni (20), (23) e (26) del numero 10, abbiamo:

$$\Theta^4_{0,1}(0) + \Theta^4_{1,0}(0) = \Theta^4_{0,0}(0)\,,$$

onde

$$C = 2\Theta^2_{0,0}(0)\,.$$

Dunque, qualunque siano $\mu - \mu'$ e $\nu - \nu'$, avremo sempre:

$$C = 2\Theta_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta_{0,\nu-\nu'}(0)\,,$$

e quindi:

$$2\Theta_{\mu,\nu}(z+w)\,\Theta_{\mu',\nu'}(z-w)\,\Theta_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta_{0,\nu-\nu'}(0) = F(z)$$

come volevamo dimostrare.

Prendendo nella equazione (1) per μ, ν, μ' e ν' le 16 differenti combinazioni dei valori 0 e 1, e sostituendo alle funzioni $\Theta_{\mu,\nu}$ i loro valori espressi per le funzioni $\theta_{\mu,\nu}$ dalle equazioni (16) del numero 10, abbiamo le seguenti formule di addizione per le funzioni Jacobiane:

$$(6)\qquad \theta_{1,1}(z+w)\,\theta_{1,1}(z-w)=\theta^2_{1,1}(z)\,\theta^2_{1,0}(w)-\theta^2_{1,0}(z)\,\theta^2_{1,1}(w)\,,$$

$$(7)\qquad \theta_{1,0}(z+w)\,\theta_{1,0}(z-w)=\theta^2_{1,0}(z)\,\theta^2_{1,0}(w)-k^2\theta^2_{1,1}(z)\,\theta^2_{1,1}(w)\,,$$

$$(8)\qquad \theta_{0,1}(z+w)\,\theta_{0,1}(z-w)=\theta^2_{1,0}(z)\,\theta^2_{0,1}(w)-\theta^2_{1,1}(z)\,\theta^2_{0,0}(w)\,,$$

$$(9)\qquad \theta_{0,0}(z+w)\,\theta_{0,0}(z-w)=\theta^2_{1,0}(z)\,\theta^2_{0,0}(w)-k^2\theta^2_{1,1}(z)\,\theta^2_{0,1}(w)\,;$$

$$(10)\qquad \theta_{1,1}(z+w)\,\theta_{1,0}(z-w)=\theta_{1,1}(z)\,\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,1}(w)\,\theta_{0,0}(w)+\theta_{0,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{1,0}(w)\,,$$

$$(11)\qquad \theta_{1,0}(z+w)\,\theta_{1,1}(z-w)=\theta_{1,1}(z)\,\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,1}(w)\,\theta_{0,0}(w)-\theta_{0,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{1,0}(w)\,,$$

$$(12)\qquad \theta_{0,1}(z+w)\,\theta_{0,0}(z-w)=\theta_{0,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,\theta_{0,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)-k'^2\theta_{1,1}(z)\,\theta_{1,0}(z)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{1,0}(w)\,,$$

$$(13)\qquad \theta_{0,0}(z+w)\,\theta_{0,1}(z-w)=\theta_{0,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,\theta_{0,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)+k'^2\theta_{1,1}(z)\,\theta_{1,0}(z)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{1,0}(w)\,;$$

$$(14)\qquad \theta_{1,0}(z+w)\,\theta_{0,1}(z-w)=\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,1}(z)\,\theta_{1,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)+\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{0,0}(w)\,,$$

$$(15)\qquad \theta_{0,1}(z+w)\,\theta_{1,1}(z-w)=\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,1}(z)\,\theta_{1,0}(w)\,\theta_{0,0}(w)-\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{0,1}(w)\,,$$

$$(16)\qquad \theta_{1,0}(z+w)\,\theta_{0,0}(z-w)=\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,0}(w)\,\theta_{1,0}(w)+k^2\theta_{0,1}(z)\,\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,1}(w)\,\theta_{1,1}(w)\,,$$

$$(17)\qquad \theta_{0,0}(z+w)\,\theta_{1,0}(z-w)=\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,0}(w)\,\theta_{1,0}(w)-k^2\theta_{0,1}(z)\,\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,1}(w)\,\theta_{1,1}(w)\,;$$

$$(18)\qquad \theta_{1,1}(z+w)\,\theta_{0,0}(z-w)=\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)+\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,1}(z)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{0,0}(w)\,,$$

$$(19)\qquad \theta_{0,0}(z+w)\,\theta_{1,1}(z-w)=\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)-\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,1}(z)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{0,0}(w)\,,$$

$$(20)\qquad \theta_{1,0}(z+w)\,\theta_{0,1}(z-w)=\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,1}(z)\,\theta_{1,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)+\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,0}(w)\,\theta_{1,1}(w)\,,$$

$$(21)\qquad \theta_{0,1}(z+w)\,\theta_{1,0}(z-w)=\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,1}(z)\,\theta_{1,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)-\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,0}(w)\,\theta_{1,1}(w).$$

12.

Ponendo nelle formule (10) e (11) del numero precedente $z + w$ in luogo di z, si ottiene:

$$\theta_{1,1}(z + 2w)\,\theta_{1,0}(z) = \theta_{1,1}(z + w)\,\theta_{1,0}(z + w)\,\theta_{0,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)$$
$$+ \theta_{0,0}(z + w)\,\theta_{0,1}(z + w)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{1,0}(w)\,,$$

$$\theta_{1,0}(z + 2w)\,\theta_{1,1}(z) = \theta_{1,1}(z + w)\,\theta_{1,0}(z + w)\,\theta_{0,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)$$
$$- \theta_{0,0}(z + w)\,\theta_{0,1}(z + w)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{1,0}(w)\,,$$

onde:

$$\theta_{1,0}(z)\,\{\theta_{1,1}(z + 2w) - \theta_{1,1}(z)\} - \theta_{1,1}(z)\,\{\theta_{1,0}(z + 2w) - \theta_{1,0}(z)\}$$
$$= 2\theta_{0,0}(z + w)\,\theta_{0,1}(z + w)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{1,0}(w)\,.$$

Dividendo i due membri di questa equazione per $2w$, e passando quindi al limite per $w = 0$, si ottiene:

$$(1) \qquad \theta_{1,0}(z)\,\frac{d\,\theta_{1,1}(z)}{dz} - \theta_{1,1}(z)\,\frac{d\,\theta_{1,0}(z)}{dz} = \theta_{0,0}(z)\,\theta_{0,1}(z).$$

Analogamente dall'equazioni (12) e (13), abbiamo:

$$(2) \qquad \theta_{0,1}(z)\,\frac{d\,\theta_{0,0}(z)}{dz} - \theta_{0,0}(z)\,\frac{d\,\theta_{0,1}(z)}{dz} = k'^2\theta_{1,1}(z)\,\theta_{1,0}(z)\,,$$

e dall'equazioni (14) e (15):

$$(3) \qquad \theta_{0,1}(z)\,\frac{d\,\theta_{1,1}(z)}{dz} - \theta_{1,1}(z)\,\frac{d\,\theta_{0,1}(z)}{dz} = \theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,;$$

e dall'equazioni (16) e (17):

$$(4) \qquad \theta_{0,0}(z)\,\frac{d\,\theta_{1,0}(z)}{dz} - \theta_{1,0}(z)\,\frac{d\,\theta_{0,0}(z)}{dz} = k^2\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,1}(z),$$

e dalle ultime quattro:

$$(5) \qquad \theta_{0,0}(z)\,\frac{d\,\theta_{1,1}(z)}{dz} - \theta_{1,1}(z)\,\frac{d\,\theta_{0,0}(z)}{dz} = \theta_{1,0}(z)\,\theta_{1,1}(z)\,,$$

$$(6) \qquad \theta_{0,1}(z)\,\frac{d\,\theta_{1,0}(z)}{dz} - \theta_{1,0}(z)\,\frac{d\,\theta_{0,1}(z)}{dz} = \theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,1}(z).$$

Di queste sei equazioni tre sono una conseguenza delle altre tre, come è facile a verificarsi. Basterà dunque considerarne tre sole. Prenderemo le tre (1), (4), (6) che contengono $\theta_{1,0}$, e le scriveremo sotto la forma:

$$(7) \qquad \frac{d\log\theta_{1,1}(z)}{dz} - \frac{d\log\theta_{1,0}(z)}{dz} = \frac{\theta_{0,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)}{\theta_{1,0}(z)\,\theta_{1,1}(z)},$$

$$(8)\qquad \frac{d\log\theta_{1,0}(z)}{dz}-\frac{d\log\theta_{0,1}(z)}{dz}=\frac{\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,1}(z)}{\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,1}(z)},$$

$$(9)\qquad \frac{d\log\theta_{1,0}(z)}{dz}-\frac{d\log\theta_{0,0}(z)}{dz}=k^2\frac{\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,1}(z)}{\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,0}(z)}.$$

Derivando queste tre equazioni, e riducendo colle altre equazioni di questo numero, si ottiene:

$$(10)\qquad \frac{d^2\log\theta_{1,1}(z)}{dz^2}-\frac{d^2\log\theta_{1,0}(z)}{dz^2}=-\frac{\theta^2_{1,0}(z)}{\theta^2_{1,1}(z)}+k^2\frac{\theta^2_{1,1}(z)}{\theta^2_{1,0}(z)},$$

$$(11)\qquad \frac{d^2\log\theta_{0,1}(z)}{dz^2}-\frac{d^2\log\theta_{1,0}(z)}{dz^2}=-\frac{\theta^2_{0,0}(z)}{\theta^2_{0,1}(z)}+k^2\frac{\theta^2_{1,1}(z)}{\theta^2_{1,0}(z)},$$

$$(12)\qquad \frac{d^2\log\theta_{0,0}(z)}{dz^2}-\frac{d^2\log\theta_{1,0}(z)}{dz^2}=-k^2\frac{\theta^3_{0,1}(z)}{\theta^2_{0,0}(z)}+k^2\frac{\theta^2_{1,1}(z)}{\theta^2_{1,0}(z)};$$

onde:

$$(13)\qquad \frac{d^2\log\theta_{1,1}(z)}{dz^2}+\frac{\theta^2_{1,0}(z)}{\theta^2_{1,1}(z)}=\frac{d^2\log\theta_{1,0}(z)}{dz^2}+k^2\frac{\theta^2_{1,1}(z)}{\theta^2_{1,0}(z)}=\frac{d^2\log\theta_{0,1}(z)}{dz^2}+\frac{\theta^2_{0,0}(z)}{\theta^2_{0,1}(z)}$$

$$=\frac{d^2\log\theta_{0,0}(z)}{dz^2}+k^2\frac{\theta^2_{0,1}(z)}{\theta^2_{0,0}(z)}=\varphi(z).$$

La funzione $\varphi(z)$ sarà una funzione intera, non potendo divenire infinita per nessun valore finito di z; perchè le quattro espressioni eguali a $\varphi(z)$ non possono avere infiniti comuni, non ne avendo le funzioni $\theta_{1,1}$, $\theta_{1,0}$, $\theta_{0,1}$, $\theta_{0,0}$.

Ora, poichè:

$$\theta_{\mu,\nu}(z+\omega)=(-1)^\nu\,\theta_{\mu,\nu}(z),\qquad \theta_{\mu,\nu}(z+\omega')=(-1)^\mu\,e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\theta_{\mu,\nu}(z).$$

Sarà:

$$\frac{d^2\log\theta_{\mu,\nu}(z+\omega)}{dz^2}=\frac{d^2\log\theta_{\mu,\nu}(z)}{dz^2},\qquad \frac{d^2\log\theta_{\mu,\nu}(z+\omega')}{dz^2}=\frac{d^2\log\theta_{\mu,\nu}(z)}{dz^2};$$

e quindi:

$$\varphi(z+\omega)=\varphi(z),\qquad \varphi(z+\omega')=\varphi(z);$$

e perciò $\varphi(z)$ dovrà essere eguale a una costante C, e avremo:

$$(14)\quad\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\log\theta_{1,1}(z)}{dz^2}+\frac{\theta^2_{1,0}(z)}{\theta^2_{1,1}(z)}=C, &&\frac{d^2\log\theta_{0,1}(z)}{dz^2}+\frac{\theta^2_{0,0}(z)}{\theta^2_{0,1}(z)}=C,\\ &\frac{d^2\log\theta_{1,0}(z)}{dz^2}+k^2\frac{\theta^2_{1,1}(z)}{\theta^2_{1,0}(z)}=C, &&\frac{d^2\log\theta_{0,0}(z)}{dz^2}+k^2\frac{\theta^2_{0,2}(z)}{\theta^2_{0,0}(z)}=C.\end{aligned}\right.$$

Per determinare la costante C poniamo:

(15) $$\chi_{\mu,\nu}(z) = e^{-\frac{cz^2}{2}}\,\theta_{\mu,\nu}(z)\;;$$

e sostituendo nelle equazioni (14), avremo:

(16) $$\frac{d^2\log\chi_{1,1}(z)}{dz^2} = -\frac{\theta^2_{1,0}(z)}{\theta^2_{1,1}(z)},$$ (17) $$\frac{d^2\log\chi_{1,0}(z)}{dz^2} = -k^2\frac{\theta^2_{1,1}(z)}{\theta^2_{1,0}(z)},$$

(18) $$\frac{d^2\log\chi_{0,1}(z)}{dz^2} = -\frac{\theta^2_{0,0}(z)}{\theta^2_{0,1}(z)},$$ (19) $$\frac{d^2\log\chi_{0,0}(z)}{dz^2} = -k^2\frac{\theta^2_{0,1}(z)}{\theta^2_{0,0}(z)}.$$

Dalla equazione (15), ponendo mente all' equazioni caratteristiche delle funzioni $\theta_{\mu,\nu}$, si ottiene:

$$\log\chi_{\mu,\nu}(z+\omega) = -C\omega z - C\frac{\omega^2}{2} + \pi i\nu + \log\chi_{\mu,\nu}(z)\,,$$

$$\log\chi_{\mu,\nu}(z+\omega') = -\left(C\omega' + \frac{2\pi i}{\omega}\right)\left(z+\frac{\omega'}{2}\right) + \pi i\mu + \log\chi_{\mu,\nu}(z)\;;$$

onde:

(20) $$\frac{1}{\chi_{\mu,\nu}(z+\omega)}\frac{d\,\chi_{\mu,\nu}(z+\omega)}{dz} - \frac{1}{\chi_{\mu,\nu}(z)}\frac{d\chi_{\mu,\nu}(z)}{dz} = -C\omega\,,$$

(21) $$\frac{1}{\chi_{\mu,\nu}(z+\omega')}\frac{d\chi_{\mu,\nu}(z+\omega')}{dz} - \frac{1}{\chi_{\mu,\nu}(z)}\frac{d\chi_{\mu,\nu}(z)}{dz} = -\left(C\omega' + \frac{2\pi i}{\omega}\right).$$

Prendo nella equazione (20) $\mu = 1$, $\nu = 0$, $z = -\frac{\omega}{2}$, e osservando che $\chi_{1,0}(z)$ è una funzione intera pari, e quindi la sua derivata è dispari, ottengo:

$$-C\omega = \frac{2}{\chi_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}\chi'_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Nella equazione (21), pongo $\mu = 1$, $\nu = 0$, $z = \frac{\omega-\omega'}{2}$, ed osservando che dalla equazione (20) si ha:

$$\frac{\chi'_{1,0}\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)}{\chi_{1,0}\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)} = -C\omega - \frac{\chi'_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\chi_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)},$$

ottengo:

(22) $$\frac{2\chi'_{1,0}\left(\frac{\omega'+\omega}{2}\right)}{\chi_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)} = -C\omega - C\omega' - \frac{2\pi i}{\omega}.$$

Pongo:

$$(23)\qquad \eta = \frac{2\chi'_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\chi_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}, \qquad \eta' = \frac{2\chi'_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\chi_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)} - \eta,$$

ed ho:

$$(24)\qquad C = -\frac{\eta}{\omega}.$$

Sostituendo nella (22):

$$(25)\qquad \eta\omega' - \eta'\omega = 2\pi i,$$

e le equazioni (20) e (21) divengono:

$$\frac{\chi'_{\mu,\nu}(z+\omega)}{\chi_{\mu,\nu}(z+\omega)} - \frac{\chi'_{\mu,\nu}(z)}{\chi_{\mu,\nu}(z)} = \eta, \qquad \frac{\chi'_{\mu,\nu}(z+\omega')}{\chi_{\mu,\nu}(z+\omega')} - \frac{\chi'_{\mu,\nu}(z)}{\chi_{\mu,\nu}(z)} = \eta';$$

onde:

$$(26)\qquad \frac{\chi'_{\mu,\nu}(z+m\omega+n\omega')}{\chi_{\mu,\nu}(z+m\omega+n\omega')} - \frac{\chi'_{\mu,\nu}(z)}{\chi_{\mu,\nu}(z)} = m\eta + n\eta'.$$

13.

Le funzioni intere $\chi_{\mu,\nu}(z)$ sodisfano ad equazioni differenziali di 2.° ordine che ci permettono di calcolare i coefficienti delle serie di potenze positive e intere di z, per le quali si possono esprimere. Ripeteremo qui il processo di calcolo impiegato a questo scopo dal Sig. *Weierstrass* (*).

Se poniamo:

$$(1)\qquad \frac{\theta_{1,1}(z)}{\theta_{1,0}(z)} = x,$$

l'equazione (1) del numero (12) darà:

$$(2)\qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2);$$

onde:

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -(1+k^2)x + 2k^2x^3.$$

Si derivi la equazione (2) riguardandovi x funzione di k: avremo:

$$\frac{dx}{dz}\frac{d^2x}{dz\,dk} = \left(-(1+k^2)x + 2k^2x^3\right)\frac{dx}{dk} - kx^2(1-x^2),$$

(*) Vedi *Journal von Crelle*. V. 52. La funzione $\chi_{1,0}(z)$ è la funzione *Al z* del Sig. *Weierstrass*.

$$\frac{dx}{dz}\frac{d^2x}{dz\,dk}-\frac{dx}{dk}\frac{d^2x}{dz^2}=-kx^2(1-x^2)\,,$$

(3) $$\frac{d\dfrac{dx}{dk}:\dfrac{dx}{dz}}{dz}=\frac{-kx^2}{1-k^2x^2}=-\frac{1}{k}\left(\frac{1}{1-k^2x^2}-1\right).$$

Ma dall'equazione (12) del numero 12, si ha:

$$\frac{d^2\log\dfrac{\theta_{0,0}(z)}{\theta_{1,0}(z)}}{dz^2}=\frac{k^2\theta^2_{1,1}(z)}{\theta^2_{1,0}(z)}-\frac{k^2\theta^2_{0,1}(z)}{\theta^2_{0,0}(z)}\,,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\log(1-k^2x^2)}{dz^2}=k^2x^2-\frac{k^2(1-x^2)}{1-k^2x^2}\,,$$

e a cagione della equazione (17):

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\log(1-k^2x^2)}{dz^2}=-\frac{d^2\log\chi_{1,0}(z)}{dz^2}+\frac{1-k^2}{1-k^2x^2}-1,$$

onde:

$$\frac{1-k^2}{1-k^2x^2}=\frac{d\left(\dfrac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz}+\dfrac{1}{2}\dfrac{d\log(1-k^2x^2)}{dz}+z\right)}{dz}.$$

Confrontando colla equazione (13):

$$k(1-k^2)\frac{d\dfrac{dx}{dk}:\dfrac{dx}{dz}}{dz}-(1-k^2)=-\frac{d\left(\dfrac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz}+\dfrac{1}{2}\dfrac{d\log(1-k^2x^2)}{dz}+z\right)}{dz}.$$

Integrando rispetto a z, e osservando che annullandosi per $z=0$, $\frac{dx}{dk}\,\chi'_{1,0}(z)$, $\theta'_{0,0}(z)$, la costante dell'integrazione deve essere eguale a zero, si ha:

$$k(1-k^2)\frac{dx}{dk}:\frac{dx}{dz}=-\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz}-\frac{1}{2}\frac{d\log(1-k^2x^2)}{dz}-k^2z,$$

ed essendo:

$$-\frac{1}{2}\frac{d\log(1-k^2x^2)}{dz}\frac{dx}{dz}=\frac{k^2x}{1-k^2x^2}\left(\frac{dx}{dz}\right)^2=k^2x(1-x^2)\,,$$

si ottiene:

(4) $$k(1-k^2)\frac{dx}{dk}=k^2x(1-x^2)-\left(k^2z+\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz}\right)\frac{dx}{dz}.$$

Moltiplicando per $4k^2x$, e osservando che dall'equazione (17) si ha:

*

$$k^2x^2 = -\frac{d^2\log\chi_{1,0}(z)}{dz^2},$$

e perciò:

$$2k^2x\frac{dx}{dk} = -\frac{d^3\log\chi_{1,0}(z)}{dz^2dk} - 2kx^2, \qquad 2k^2x\frac{dx}{dz} = -\frac{d^3\log\chi_{1,0}(z)}{dz^3},$$

otteniamo:

$$(6) \quad 2k(1-k^2)\frac{d^3\log\chi_{1,0}(z)}{dz^2dk} + 2k^2z\frac{d^3\log\chi_{1,0}(z)}{dz^3} + 2\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz}\frac{d^3\log\chi_{1,0}(z)}{dz^3}$$

$$+ 4k^2x^2 - 4k^4x^4 = 0;$$

onde, poichè:

$$2k^2z\frac{d^3\log\chi_{1,0}(z)}{dz^2} = 2\frac{d\left(k^2z^2\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz}\right)}{dz^2} - 4k^2\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz^2},$$

$$2\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz}\frac{d^3\log\chi_{1,0}(z)}{dz^3} = \frac{d^2\left(\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz}\right)^2}{dz^2} - 2\left(\frac{d^2\log\chi_{1,0}(z)}{dz^2}\right)^2$$

$$= \frac{d^2\left(\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz}\right)^2}{dz^2} - 2k^4x^4;$$

avremo:

$$\frac{d^2\left\{2k(1-k^2)\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dk} + 2k^2z\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz} + \left(\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz}\right)^2\right\}}{dz^2}$$

$$+ 4k^2(1+k^2)x^2 - 6k^4x^4 = 0.$$

Ma dalla (5) si ha:

$$\frac{d^4\log\chi_{1,0}(z)}{dz^4} = -2k^2x\frac{d^2x}{dz^2} - 2k^2\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = -2k^2 + 4k^2(1+k^2)x^2 - 6k^4x^4,$$

onde:

$$\frac{d^2\left\{2k(1-k^2)\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz} + 2k^2z\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz} + \left(\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz}\right)^2\right\}}{dz} + \frac{d^4\log\chi_{1,0}(z)}{dz^2} + 2k^2 = 0.$$

Integrando, e osservando che si ha:

$$\chi_{1,0}(z)\,\chi''_{1,0}(z) - \chi'^2_{1,0} = -k^2\chi^2_{1,1}(z),$$

e quindi:

$$\chi''_{1,0}(0) = 0,$$

ed anche :

$$\chi_{1,0}'''(0) = 0 ,$$

perchè $\chi_{1,0}(z)$ è pari, e che perciò non deve aggiungersi alcuna costante, si ottiene:

$$\frac{d^2 \log \chi_{1,0}(z)}{dz^2} + 2k(1 - k^2)\frac{d \log \chi_{1,0}(z)}{dk} + 2k^2 z \frac{d \log \chi_{1,0}(z)}{dz} + \left(\frac{d \log \chi_{1,0}(z)}{dz}\right)^2 + k^2 z^2 = 0,$$

$$(7) \qquad \frac{d^2 \chi_{1,0}(z)}{dz^2} + 2k^2 z \frac{d \chi_{1,0}(z)}{dz} + 2k(1 - k^2)\frac{d \chi_{1,0}(z)}{dk} + k^2 z^2 \chi_{1,0}(z) = 0.$$

Analogamente si trova :

$$8) \qquad \frac{d^2 \chi_{1,1}(z)}{dz^2} + 2k^2 z \frac{d \chi_{1,1}(z)}{dz} + 2k(1-k^2)\frac{d \chi_{1,0}(z)}{dk} + (1 - k^2 + k^2 z^2)\, \chi_{1,1}(z) = 0 ,$$

$$(9) \qquad \frac{d^2 \chi_{0,1}(z)}{dz^2} + 2k^2 z \frac{d \chi_{0,1}(z)}{dz} + 2k(1-k^2)\frac{d \chi_{0,1}(z)}{dk} + (1 + k^2 z^2)\, \chi_{0,1}(z) = 0 ,$$

$$(10) \qquad \frac{d^2 \chi_{0,0}(z)}{dz^2} + 2k^2 z \frac{d \chi_{0,0}(z)}{dz} + 2k(1 - k^2)\frac{d \chi_{0,0}(z)}{dk} + (k^2 + k^2 z^2)\, \chi_{0,0}(z) = 0 .$$

Ora $\chi_{1,0}(z)$ è una funzione intera pari che diviene eguale all'unità per $z = 0$, come risulta dall'equazione (15) del numero 12; dunque avremo :

$$\chi_{1,0}(z) = 1 + A_1 z^2 + A_2 z^4 + A_3 z^6 + \ldots .$$

Dall'equazione (7) si deduce:

$$A_1 = 0, \quad 3.4 A_2 + k^2 = 0, \quad 5.6 A_3 + 2.4 k^2 A_2 + 2k(1 - k^2)\frac{dA_2}{dk} = 0,$$

$$2r(2r - 1)A_r + 4(r - 1)k^2 A_{r-1} + k^2 A_{r-2} + 2k(1 - k^2)\frac{dA_{r-1}}{dk} = 0;$$

onde i valori dei coefficienti in funzione di k. Analogamente per le altre funzioni $\chi_{\mu,\nu}(z)$.

Ottenute l'espressioni analitiche delle funzioni $\chi_{\mu,\nu}(z)$ possiamo riguardare compiutamente determinati mediante l'equazioni (23) del numero precedente i valori di η e di η', e quindi il valore della costante C, che comparisce nelle equazioni (14) dello stesso numero, e abbiamo :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{d^2 \log \theta_{1,1}(z)}{dz^2} = -\dfrac{\eta}{\omega} - k^2 \dfrac{\theta_{1,0}^2(z)}{\theta_{1,1}^2(z)}, & \dfrac{d^2 \log \theta_{1,0}(z)}{dz^2} = -\dfrac{\eta}{\omega} - \dfrac{\theta_{1,1}^2(z)}{\theta_{1,0}^2(z)}, \\ \dfrac{d^2 \log \theta_{0,1}(z)}{dz^2} = -\dfrac{\eta}{\omega} - \dfrac{\theta_{0,0}^2(z)}{\theta_{0,1}^2(z)}, & \dfrac{d^2 \log \theta_{0,0}(z)}{dz^2} = -\dfrac{\eta}{\omega} - k^2 \dfrac{\theta_{0,1}^2(z)}{\theta_{0,0}^2(z)} . \end{array} \right.$$

Sostituendo alle funzioni $\theta_{\mu,\nu}$ le loro espressioni per mezzo delle $\Theta_{\mu,\nu}(z)$, abbiamo

le quattro formule:

$$(12)\qquad \frac{d^2\log\Theta_{1,1}(z)}{dz^2} = -\frac{\eta}{\omega} + k\,\frac{\Theta^2_{\mu,\nu+1}(z)}{\Theta^2_{\mu,\nu}(z)},$$

$$(13)\qquad \frac{d^2\log\Theta_{1,0}(z)}{dz^2} = -\frac{\eta}{\omega} + k\,\frac{\Theta^2_{1,1}(z)}{\Theta^2_{1,0}(z)},$$

$$(14)\qquad \frac{d^2\log\Theta_{0,1}(z)}{dz^2} = -\frac{\eta}{\omega} - k\,\frac{\Theta^2_{0,0}(z)}{\Theta^2_{0,1}(z)},$$

$$(15)\qquad \frac{d^2\log\Theta_{0,0}(z)}{dz^2} = -\frac{\eta}{\omega} - k\,\frac{\Theta^2_{0,1}(z)}{\Theta^2_{0,0}(z)}.$$

14.

Le funzioni $\Theta_{\mu,\nu}$ sono a due variabili $\frac{\pi z}{\omega}$ e q, e sodisfano a una equazione a derivate parziali molto semplice. Poniamo:

$$(1)\qquad \frac{\pi z}{\omega} = x;$$

avremo:

$$(2)\qquad \Theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{\mu n} q^{\left(\frac{2n+\nu}{2}\right)^2} e^{(2n+\nu)ix},$$

e quindi:

$$\frac{d^2\Theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}{dx^2} = -\sum (-1)^{\mu n}(2n+\nu)^2 q^{\left(\frac{2n+\nu}{2}\right)^2} e^{(2n+\nu)ix},$$

$$\frac{d\,\Theta\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}{dq} = \frac{1}{4}\sum (-1)^{\mu\nu}(2n+\nu)^2 q^{\left(\frac{2n+\nu}{2}\right)^2-1} e^{(2n+\nu)ix};$$

onde:

$$(3)\qquad \frac{d^2\Theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}{dx^2} = -4q\,\frac{d\,\Theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}{dq}.$$

Le quantità k, k' e ω sono tutte funzioni di q, delle quali facilmente determineremo le derivate, valendosi delle equazioni differenziali che abbiamo trovate.

Prendiamo l'equazione (10) del numero 12, cioè:

$$(4)\qquad \frac{1}{\theta_{1,1}(z)}\frac{d^2\theta_{1,1}(z)}{dz^2} - \frac{1}{\theta_{1,0}(z)}\frac{d^2\theta_{1,0}(z)}{dz^2} + \frac{1}{\theta^2_{1,0}(z)}\left(\frac{d\,\theta_{1,0}(z)}{dz}\right)^2 - \frac{1}{\theta^2_{1,1}(z)}\left(\frac{d\,\theta_{1,1}(z)}{dz}\right)^2$$
$$= -\frac{\theta^2_{1,0}(z)}{\theta^2_{1,1}(z)} + k^2\,\frac{\theta^2_{1,1}(z)}{\theta^2_{1,0}(z)}.$$

Ora, abbiamo:

$$\frac{1}{\theta_{1,1}(z)}\frac{d^2\theta_{1,1}(z)}{dz^2}-\frac{1}{\theta_{1,0}(z)}\frac{d^2\theta_{1,0}(z)}{dz^2}=\frac{1}{\Theta_{1,1}(z)}\frac{d^2\Theta_{1,1}(z)}{dz^2}-\frac{1}{\Theta_{1,0}(z)}\frac{d^2\Theta_{1,0}(z)}{dz^2}$$

$$=\frac{\pi^2}{\omega^2}\left(\frac{1}{\Theta_{1,1}(z)}\frac{d^2\Theta_{1,1}(z)}{dx^2}-\frac{1}{\Theta_{1,0}(z)}\frac{d^2\Theta_{1,0}(z)}{dx^2}\right)=-4q\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{d\log\dfrac{\Theta_{1,1}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}{\Theta_{1,0}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}}{dq},$$

e a cagione dell'equazione (1) del numero 12:

$$\frac{1}{\theta_{1,1}^2(z)}\left(\frac{d\,\theta_{1,0}(z)}{dz}\right)^2-\frac{1}{\theta_{1,0}^2(z)}\left(\frac{d\,\theta_{1,0}(z)}{dz}\right)^2$$
$$=\frac{\theta_{0,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)}{\theta_{1,0}^2(z)\,\theta_{1,1}^2(z)}\left(\theta_{1,0}(z)\frac{d\,\theta_{1,1}(z)}{dz}+\theta_{1,1}(z)\frac{d\,\theta_{1,0}(z)}{dz}\right).$$

Onde l'equazione (1) diviene:

$$-4q\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{d\log\dfrac{\Theta_{1,1}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}{\Theta_{1,0}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}}{dq}-\frac{\theta_{0,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)}{\theta_{1,1}^2(z)\,\theta_{1,0}^2(z)}\left(\theta_{1,0}(z)\frac{d\,\theta_{1,1}(z)}{dz}+\theta_{1,1}(z)\frac{d\,\theta_{1,0}(z)}{dz}\right)$$
$$=k^2\frac{\theta_{1,1}^2(z)}{\theta_{1,0}^2(z)}-\frac{\theta_{1,0}^2(z)}{\theta_{1,1}^2(z)}.$$

Poniamo $x=\frac{\pi}{2}$, e quindi $z=\frac{\omega}{2}$, ed essendo:

$$\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}=\frac{1}{i\sqrt{k}}\frac{\Theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\Theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}=1\,,\qquad \theta_{0,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)=0$$

avremo:

$$-4q\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{d\log\sqrt{k}}{dq}=k^2-1\,,$$

ossia

$$(5)\qquad \frac{dk}{dq}=\frac{kk'^2\omega^2}{2q\pi^2},$$

e poichè:

$$k\frac{dk}{dq}+k'\frac{dk'}{dq}=0\,,$$

sarà:

$$\frac{dk'}{dq} = -\frac{k'k^2\omega^2}{2q\pi^2}. \tag{6}$$

Dalla equazione (15) del numero 13, abbiamo:

$$\frac{1}{\Theta_{0,0}(z)}\frac{d^2\Theta_{0,0}(z)}{dz^2} - \frac{1}{\Theta^2_{0,0}(z)}\left(\frac{d\,\Theta_{0,0}(z)}{dz}\right)^2 = -\frac{\eta}{\omega} - k\frac{\Theta^2_{0,1}(z)}{\Theta^2_{0,0}(z)}.$$

Ora a cagione della equazione (3), è:

$$\frac{1}{\Theta_{0,0}(z)}\frac{d^2\Theta_{0,0}(z)}{dz^2} = -4q\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{d\log\Theta_{0,0}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}{dq}$$

onde:

$$-4q\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{d\log\Theta_{0,0}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}{dq} - \frac{1}{\Theta^2_{0,0}(z)}\left(\frac{d\,\Theta_{0,0}(z)}{dz}\right)^2 = -\frac{\eta}{\omega} - k\frac{\Theta^2_{0,1}(z)}{\Theta^2_{0,0}(z)}.$$

Ponendo $z = 0$, e osservando che si ha:

$$\Theta_{0,0}(0) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}}, \quad \left(\frac{d\,\Theta_{0,0}(z)}{dz}\right)_{z=0} = 0, \quad \Theta_{0,1}(0) = \sqrt{\frac{k\omega}{\pi}},$$

si ottiene:

$$4q\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{d\log\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}}{dq} = \frac{\eta}{\omega} + k^2,$$

$$\frac{d\omega}{dq} = \frac{(\eta + k^2\omega)\omega}{2q\pi^2}. \tag{7}$$

15.

Passiamo ora alla determinazione delle formule che danno la moltiplicazione dell' argomento nelle funzioni Jacobiane per un numero reale e intero, cioè alla determinazione delle espressioni delle funzioni $\theta_{\mu,\nu}(nz)$ per mezzo delle funzioni $\theta_{\mu,\nu}(z)$.

Le radici della funzione intera $\theta_{\mu,\nu}(nz)$ sono tutte e sole le quantità:

$$\frac{(2r + \mu - 1)\omega + (2s + \nu - 1)\omega'}{2n}. \tag{1}$$

Qualunque siano i numeri interi reali r ed s potranno sempre porsi sotto la forma:

$$r = nr' + \left(\frac{n-1}{2}\right)(\mu - 1) + \alpha, \qquad s = ns' + \left(\frac{n-1}{2}\right)(\nu - 1) + \beta,$$

dove α e β sono interi reali minori di n. Quindi le radici di $\theta_{\mu\nu}(nz)$ saranno tutte e sole le quantità:

$$(2) \qquad r'\omega + s'\omega' + \frac{(\mu-1)\omega + (\nu-1)\omega'}{2} + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}.$$

Ma il prodotto:

$$\prod_{0}^{n-1}{}_{\alpha} \prod_{0}^{n-1}{}_{\beta}\, \theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)$$

ha evidentemente anch'esso per radici tutte e sole le quantità della forma (2): dunque avremo:

$$(3) \qquad \theta_{\mu,\nu}(nz) = \varphi(z) \prod_{0}^{n-1}{}_{\alpha} \prod_{0}^{n-1}{}_{\beta}\, \theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right),$$

dove $\varphi(z)$ è una funzione intera che non ha radici finite.

Mutando z in $z + \omega$, e osservando l'equazione (4) del numero 6, si ottiene:

$$(4) \qquad \varphi(z + \omega) = \varphi(z).$$

Mutando z in $z + \omega'$, e osservando l'equazione (5) del numero 6, si ha:

$$e^{-\frac{\pi i n^2}{\omega}(2z+\omega')}\theta_{\mu,\nu}(nz) = \varphi(z+\omega')e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left[n^2\,(2z+\omega')+2\sum\limits_0^{n-1}\sum\limits_0^{n-1}\frac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right]} \prod_{0}^{n-1}\prod_{0}^{n-1}\theta_{\mu,\nu}\left(z+\frac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right),$$

$$\theta_{\mu,\nu}(nz) = \varphi(z+\omega')e^{-n(n-1)\frac{\pi i\omega'}{\omega}} \prod_{0}^{n-1}\prod_{0}^{n-1}\theta_{\mu,\nu}\left(z+\frac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right),$$

e dividendo per la equazione (3), si ottiene:

$$(5) \qquad \varphi(z+\omega') = e^{n(n-1)\frac{\pi i\omega'}{\omega}}\varphi(z).$$

Ponendo:

$$\varphi(z) = e^{n(n-1)\frac{\pi i z}{\omega}}\psi(z),$$

l'equazioni (4) e (5) danno:

$$\psi(z+\omega) = \psi(z), \qquad \psi(z+\omega') = \psi(z);$$

onde $\psi(z)$ che dev'essere una funzione intera, non può essere altro che una costante C, e si ha:

$$\theta_{\mu,\nu}(nz) = Ce^{n(n-1)\frac{\pi i z}{\omega}} \prod_{0}^{n-1}\prod_{0}^{n-1}\theta_{\mu,\nu}\left(z+\frac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right).$$

Per determinare la costante C, se $\mu\nu = 0$ pongo $z = 0$, se $\mu\nu = 1$ divido i due membri per z e poi pongo $z = 0$, ed ho:

$$C = \frac{n^{\mu\nu}}{\prod_0^{n-1}{}' \prod_0^{n-1}{}' \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)},$$

dove gli apici alle lettere Π indicano che si deve escludere il fattore che corrisponde ad $\alpha = \beta = 0$. Pertanto abbiamo:

$$(6) \qquad \theta_{\mu,\nu}(nz) = e^{n(n-1)\frac{\pi i z}{\omega}} n^{\mu\nu} \frac{\prod_0^{n-1} \prod_0^{n-1} \theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)}{\prod_0^{n-1}{}' \prod_0^{n-1}{}' \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)}.$$

Trasformiamo il secondo membro di questa equazione in una funzione razionale di $\theta_{1,1}(z)$ e $\theta_{1,0}(z)$.

Osservando l'equazioni caratteristiche delle funzioni Jacobiane, e la equazione (1) del numero 11, si ha:

$$\frac{\theta_{1,1}\left(z + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)\theta_{1,1}\left(z + \frac{(n-\alpha)\omega + (n-\beta)\omega'}{n}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)\theta_{1,1}\left(\frac{(n-\alpha)\omega + (n-\beta)\omega'}{n}\right)}$$

$$= -e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}} \frac{\theta_{1,1}\left(z + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)\theta_{1,1}\left(z - \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)}{\theta_{1,1}^2\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)}$$

$$= e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}} \left\{ \theta_{1,0}^2(z) - \frac{\theta_{1,0}^2\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)}{\theta_{1,1}^2\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)} \theta_{1,1}^2(z) \right\}.$$

Onde sostituendo nella equazione (6) dove sia $\mu = \nu = 1$, si ottiene:

$$(7) \qquad \theta_{1,1}(nz) = n\, \theta_{1,0}(z)\, \Pi_\alpha \Pi_\beta \left\{ \theta_{1,0}^2(z) - \frac{\theta_{1,0}^2\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)}{\theta_{1,1}^2\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)} \theta_{1,1}^2(z) \right\}$$

dove il segno $\Pi_\alpha \Pi_\beta$ indica che il prodotto dev'estendersi a tutti i valori positivi di α minori di $\frac{n+1}{2}$, e a tutti i valori positivi di β minori di n, ma per $\alpha = 0$ si devono prendere per β soltanto i valori minori di $\frac{n+1}{2}$ escluso $\beta = 0$.

Analogamente per mezzo delle equazioni (7), (8), (9) del numero 11, si ha:

$$(8)\qquad \theta_{1,0}(z)=\theta_{1,0}(z)\,\Pi_\alpha\,\Pi_\beta\left\{\theta^2_{1,0}(z)-k^2\frac{\theta^2_{1,1}\left(\dfrac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)}{\theta^2_{1,0}\left(\dfrac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)}\theta^2_{1,1}(z)\right\},$$

$$(9)\qquad \theta_{0,1}(z)=\theta_{0,1}(z)\,\Pi_\alpha\,\Pi_\beta\left\{\theta^2_{1,0}(z)-\frac{\theta^2_{0,0}\left(\dfrac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)}{\theta^2_{0,1}\left(\dfrac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)}\theta^2_{1,1}(z)\right\},$$

$$(10)\qquad \theta_{0,0}(z)=\theta_{0,0}(z)\,\Pi_\alpha\,\Pi_\beta\left\{\theta^2_{1,0}(z)-k^2\frac{\theta^2_{0,1}\left(\dfrac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)}{\theta^2_{0,0}\left(\dfrac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)}\theta^2_{1,1}(z)\right\}.$$

16.

Le funzioni Jacobiane sono in generale funzioni di tre quantità z, ω' e ω, e quando tra ω' e ω non esiste la relazione (5) del numero 8, le indicheremo colla notazione $\theta_{\mu,\nu}(z,\omega',\omega)$, e quando esiste questa relazione essendo funzioni delle sole due quantità z ed $\dfrac{\omega'}{\omega}$, le indicheremo colla notazione $\theta_{\mu,\nu}\left(z,\dfrac{\omega'}{\omega}\right)$, e con $\theta_{\mu,\nu}(z)$ semplicemente nei casi nei quali non possa cader dubbio sul valore del rapporto $\dfrac{\omega'}{\omega}$. Quindi essendo:

$$\frac{\omega'_1}{\omega_1}=\frac{\omega'}{\omega},\quad \theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2},\omega',\omega\right)=\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2},\omega',\omega\right),$$

l'equazioni (3) del numero 8, daranno:

$$(A)\qquad\left\{\begin{aligned}&\theta_{1,1}(z,\omega'_1,\omega_1)=\frac{\omega}{\omega_1}\theta_{1,1}\left(\frac{\omega_1}{\omega}z,\frac{\omega'}{\omega}\right),\\&\theta_{\mu,\nu}(z,\omega'_1,\omega_1)=\theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega_1}{\omega}z,\frac{\omega'}{\omega}\right);\quad \mu\nu=0.\end{aligned}\right.$$

Fin qui abbiamo considerato le relazioni tra le funzioni Jacobiane nelle quali era eguale il valore della seconda variabile $\dfrac{\omega'}{\omega}$. Passiamo ora alla determinazione delle relazioni che esistono tra le funzioni Jacobiane $\theta_{\mu,\nu}(z,\Omega',\Omega)$ e $\theta_{\mu,\nu}\left(z,\dfrac{\omega'}{\omega}\right)$ quando sia

$$(1)\qquad \omega=\alpha\Omega+\beta\Omega',\qquad \omega'=\gamma\Omega+\delta\Omega',$$

dove α, β, γ e δ sono numeri interi e reali. La risoluzione di questo problema costituisce ciò che suol dirsi la *trasformazione* di queste funzioni. Il numero a cui è eguale il determinante $\alpha\delta-\beta\gamma$ dicesi l'*ordine* della trasformazione. Cominciamo dalle trasformazioni di primo ordine, cioè sia:

$$(2) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Le radici di $\theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega)$ sono evidentemente tutte le quantità:

$$(2m + \mu - 1)\Omega + (2n + \nu - 1)\frac{\Omega'}{2},$$

le quali, sostituendo i valori di Ω e Ω' dati dall'equazioni (1), e ponendo:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mu' - 1 \equiv (\mu - 1)\delta - (\nu - 1)\gamma \\ \nu' - 1 \equiv (\nu - 1)\alpha - (\mu - 1)\beta \end{array} \right. \pmod{2}:$$

prendono la forma:

$$(4) \qquad (2m' + \mu' - 1)\frac{\omega}{2} + (2n' + \nu' - 1)\frac{\omega'}{2}.$$

Osservando che a cagione dell'equazione (2) non possono essere contemporaneamente numeri pari δ e γ, α e β, si ha:

$$(\delta + 1)(\gamma + 1) \equiv 0\,, \quad (\alpha + 1)(\beta + 1) \equiv 0 \pmod{2},$$

e le congruenze (3) possono scriversi:

$$(5) \qquad \begin{array}{l} \mu' \equiv \mu\delta + \nu\gamma + \delta\gamma \\ \nu' \equiv \nu\alpha + \mu\beta + \alpha\beta \end{array} \pmod{2}.$$

Ora le quantità (4) sono tutte le radici di $\theta_{\mu,\nu}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right)$; quindi:

$$(6) \qquad \theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega) = \varphi(z)\theta_{\mu',\nu'}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right),$$

dove $\varphi(z)$ è una funzione intera che non ha radici finite.

Mutando z in $z + \omega$, abbiamo:

$$(-1)^{\alpha\nu+\beta\mu} e^{-\frac{\pi i\beta}{\Omega}(2z + \beta\Omega')} \theta_{\mu,\nu}(z + \Omega', \Omega) = (-1)^{\nu'} \theta_{\mu',\nu'}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right)\varphi(z + \omega).$$

Dividendo per la equazione (6), e osservando la seconda congruenza (5), e la prima dell'equazioni (1), si ottiene:

$$(7) \qquad \varphi(z + \omega) = e^{-\frac{\pi i\beta}{\Omega}(2z+\omega)} \varphi(z).$$

Mutando z in $z + \omega'$ nella equazione (6), si ha:

$$(-1)^{\gamma\nu+\delta\mu} e^{-\frac{\pi i\delta}{\Omega}(2z + \delta\Omega')} \theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega) = (-1)^{\mu'} e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')} \varphi(z + \omega')\theta_{\mu',\nu'}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right).$$

Dividendo per la equazione (6), e osservando la prima delle congruenze (5), e l'equazioni (1) e (2), si ottiene :

$$(8) \qquad \varphi(z+\omega') = e^{-\frac{\pi i \beta \omega'}{\omega \Omega}(2z+\omega')}\varphi(z).$$

Ponendo :

$$\varphi(z) = e^{-\frac{\pi i \beta z^2}{\omega \Omega}}\psi(z),$$

l'equazioni (7) e (8) danno :

$$\psi(z+\omega) = \psi(z), \qquad \psi(z+\omega') = \psi(z);$$

onde $\psi(z)$ essendo necessariamente una funzione intera, sarà una costante C, e avremo:

$$\theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega) = Ce^{-\frac{\pi i \beta z^2}{\omega \Omega}}\theta_{\mu',\nu'}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right).$$

Se $\mu\nu = 1$, sarà anche $\mu'\nu' = 1$, e dividendo per z e ponendo $z = 0$, si ha $C = 1$. Se $\mu\nu = 0$ sarà anche $\mu'\nu' = 0$, e ponendo $z = 0$, si ha $C = 1$. Dunque :

$$(9) \qquad \theta_{\mu,\nu}(z, \Omega' \Omega) = e^{-\frac{\pi i \beta z^2}{\omega \Omega}}\theta_{\mu',\nu'}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right).$$

Ponendo :

$$(10) \qquad \frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{\Omega'}{\Omega}, \quad \theta_{1,1}\left(\frac{\Lambda}{2}, \Lambda', \Lambda\right) = \theta_{1,0}\left(\frac{\Lambda}{2}, \Lambda', \Lambda\right), \quad \frac{\Omega}{\Lambda} = M$$

avremo dall'equazioni (A) :

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} M\theta_{1,1}\left(\frac{z}{M}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) &= e^{-\frac{\pi \beta i z^2}{M\omega\Lambda}}\theta_{1,1}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right), \\ \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{z}{M}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) &= e^{-\frac{\pi i \beta z^2}{M\omega\Lambda}}\theta_{\mu',\nu'}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right), \quad \mu\nu = \mu'\nu' = 0. \end{aligned} \right.$$

Per determinare M e il modulo λ delle prime funzioni per mezzo del modulo k delle seconde, poniamo nell'equazioni (11) :

$$z = \frac{\Omega}{2} = \frac{\delta\omega - \beta\omega'}{2}.$$

Dividendole una per l'altra, e osservando le congruenze (5) e l' equazioni (10) , si ottiene :

$$(12) \qquad M = \frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\delta\omega - \beta\omega'}{2}, \frac{\omega'}{\omega}\right)}{\theta_{\delta(\gamma+1), \beta(\alpha+1)}\left(\frac{\delta\omega - \beta\omega'}{2}, \frac{\omega'}{\omega}\right)}.$$

Poniamo poi nelle medesime equazioni (11):

$$z = \frac{\Omega + \Omega'}{2} = (\delta - \gamma)\frac{\omega}{2} + (\alpha - \beta)\frac{\omega'}{2}.$$

Dividendole una per l'altra, e osservando le congruenze (4), l'equazioni (10) e l'equazione (8) del numero 8, si ottiene:

$$(13) \qquad \lambda^2 = M^2 \frac{\theta^2_{\delta(\gamma+1),\,\beta(\alpha+1)}\left((\delta-\gamma)\frac{\omega}{2} + (\alpha-\beta)\frac{\omega'}{2},\ \frac{\omega'}{\omega}\right)}{\theta^2_{1,1}\left((\delta-\gamma)\frac{\omega}{2} + (\alpha-\beta)\frac{\omega'}{2},\ \frac{\omega'}{\omega}\right)}.$$

Considerando ora separatamente i sei casi distinti che possono darsi per i valori di $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ rispetto al modulo 2, e rammentando l'equazioni del numero 8, si ottiene:

1° Caso. $\alpha \equiv 1,\ \beta \equiv 1,\ \gamma \equiv 1,\ \delta \equiv 0:$

$$(14) \quad \begin{cases} \theta_{1,1}\left(kz, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = ke^{-\frac{\pi i k\beta z^2}{\omega\Lambda}}\theta_{1,1}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right), \\ \theta_{\mu,\nu}\left(kz, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{-\frac{\pi i k\beta z^2}{\omega\Lambda}}\theta_{\mu,\mu+\nu+1}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right), \\ \lambda^2 = \frac{1}{k^2}. \end{cases}$$

2° Caso. $\alpha \equiv 1,\ \beta \equiv 1,\ \gamma \equiv 1,\ \delta \equiv 0:$

$$(15) \quad \begin{cases} \theta_{1,1}\left(ikz, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = ike^{\frac{\pi k\beta z^2}{\omega\Lambda}}\theta_{1,1}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right), \\ \theta_{\mu,\nu}\left(ikz, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{\frac{\pi k\beta z^2}{\omega\Lambda}}\theta_{\nu,\,\mu+\nu+1}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right), \\ \lambda^2 = -\frac{k^2}{k}. \end{cases}$$

3° Caso. $\alpha \equiv 1,\ \beta \equiv 0,\ \gamma \equiv 1,\ \delta \equiv 1:$

$$(16) \quad \begin{cases} \theta_{1,1}\left(k'z,\ \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = k'e^{-\frac{\pi i k'\beta z^2}{\omega\Lambda}}\theta_{1,1}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right), \\ \theta_{\mu,\nu}\left(k'z,\ \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{-\frac{\pi i k'\beta z^2}{\omega\Lambda}}\theta_{\mu+\nu+1,\,\nu}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right), \\ \lambda^2 = -\frac{k^2}{k'^2}. \end{cases}$$

4° Caso. $\alpha \equiv 1,\ \beta \equiv 0,\ \gamma \equiv 0,\ \delta \equiv 1$:

$$(17)\quad \begin{cases} \theta_{1,1}\left(z, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{-\frac{\pi i \beta z^2}{\omega \Lambda}} \theta_{1,1}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right), \\ \theta_{\mu,\nu}\left(z, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{-\frac{\pi i \beta z^2}{\omega \Lambda}} \theta_{\mu,\nu}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right), \\ \lambda^2 = k^2. \end{cases}$$

5. $\alpha \equiv 0,\ \beta \equiv 1,\ \gamma \equiv 1,\ \delta \equiv 1$:

$$(18)\quad \begin{cases} \theta_{1,1}\left(k'z, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = k'e^{-\frac{\pi i k' \beta z^2}{\omega \Lambda}} \theta_{1,1}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right), \\ \theta_{\mu,\nu}\left(k'z, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{-\frac{\pi i k' \beta z^2}{\omega \Lambda}} \theta_{\mu+\nu+1,\mu}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right). \\ \lambda^2 = -\frac{1}{k^2}. \end{cases}$$

6° Caso. $\alpha \equiv 0,\ \beta \equiv 1,\ \gamma \equiv 1,\ \delta \equiv 0$:

$$(19)\quad \begin{cases} \theta_{1,1}\left(iz, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = ie^{\frac{\pi \beta z^2}{\omega \Lambda}} \theta_{1,1}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right), \\ \theta_{\mu,\nu}\left(iz, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{\frac{\pi \beta z^2}{\omega \Lambda}} \theta_{\nu,\mu}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right), \\ \lambda^2 = k'^2. \end{cases}$$

17.

Passiamo ora alle trasformazioni di secondo ordine, cioè determiniamo le relazioni che esistono tra le funzioni $\theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega)$ e $\theta_{\mu,\nu}(z)$, quando è :

$$(1)\qquad \omega = \alpha\Omega + \beta\Omega', \qquad \omega' = \gamma\Omega + \delta\Omega';$$

$$(2)\qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 2.$$

La funzione $\theta_{1,1}(z, \Omega', \Omega)$ ha per radici tutte le quantità della forma :

$$(3)\qquad m\Omega + n\Omega' = (m\delta - n\gamma)\frac{\omega}{2} + (n\alpha - m\beta)\frac{\omega'}{2}.$$

Se prendiamo per r ed s i valori 0 od 1, non ambedue eguali a zero, che so-

disfano alle congruenze :

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} r\alpha + s\gamma \equiv 0 \\ r\beta + s\delta \equiv 0 \end{array} \right. (\text{mod. } 2) ,$$

il che è sempre possibile a cagione della (2), e indichiamo con ε zero o l'unità; avremo contemporaneamente :

$$\begin{array}{l} m\delta - n\gamma \equiv \varepsilon r \\ n\alpha - m\beta \equiv \varepsilon s \end{array} (\text{mod. } 2) ,$$

e le quantità (3) prenderanno tutte la forma :

$$(5) \qquad m'\omega + n'\omega' + \varepsilon\left(\frac{r\omega + s\omega'}{2}\right).$$

Ora le quantità (5) sono evidentemente tutte le radici della funzione intera

$$\theta_{1,1}(z)\ \theta_{1+r,\,1+s}(z) ;$$

dunque avremo :

$$\theta_{1,1}(z, \Omega', \Omega) = \varphi(z)\ \theta_{1,1}(z)\ \theta_{1+r,\,1+s}(z) ,$$

dove $\varphi(z)$ è una funzione intera che non ha radici finite.

Osservando l'equazioni caratteristiche di $\theta_{1,1}(z)$, e le congruenze :

$$\begin{array}{l} \alpha\beta + \alpha + \beta + s \equiv 0 \\ \gamma\delta + \gamma + \delta + r \equiv 0 \end{array} (\text{mod. } 2);$$

che sono conseguenza delle congruenze (4) e dell'equazione (2), ottengo per determinare $\varphi(z)$ l'equazioni :

$$\varphi(z + \omega) = e^{-\frac{\pi i\beta\omega}{\omega\Omega}(2z+\omega)}\varphi(z) , \qquad \varphi(z + \omega') = e^{-\frac{\pi i\beta\omega'}{\omega\Omega}(2z+\omega')}\varphi(z) ,$$

dalle quali deduco nel solito modo :

$$\varphi(z) = Ce^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\omega\Omega}} ;$$

onde :

$$\theta_{1,1}(z, \Omega', \Omega) = Ce^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\omega\Omega}}\ \theta_{1,1}(z)\ \theta_{1+r,\,1+s}(z) .$$

Dividendo per z, e facendo $z = 0$, ottengo $C = 1$. Quindi :

$$(6) \qquad \theta_{1,1}(z, \Omega', \Omega) = e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\omega\Omega}}\ \theta_{1,1}(z)\ \theta_{1+r,\,1+s}(z).$$

Poniamo :

$$(7) \qquad \frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{\Lambda'}{\Lambda} , \ \frac{\Omega}{\Lambda} = \mathrm{M} , \qquad \theta_{1,1}\left(\frac{\Lambda}{2} , \Lambda', \Lambda\right) = \theta_{1,0}\left(\frac{\Lambda}{2} , \Lambda', \Lambda\right),$$

ed avremo dall'equazioni (A) del numero 16 :

$$(8)\qquad M\,\theta_{1,1}\left(\frac{z}{M},\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)=e^{-\frac{\pi i \beta z^2}{M\omega\Lambda}}\,\theta_{1,1}(z)\,\theta_{1+r,\,1+s}(z).$$

Le radici della funzione intera $\theta_{1,0}(z,\Omega',\Omega)$ sono evidentemente tutte le quantità della forma :

$$(9)\qquad m\Omega+n\Omega'+\frac{\Omega'}{2}=(m\delta-n\gamma)\frac{\omega}{2}+(n\alpha-m\beta)\frac{\omega'}{2}+\frac{\alpha}{4}\omega'-\frac{\gamma}{4}\omega.$$

1.° Caso. Se $\alpha\equiv\gamma\equiv0$ (mod. 2) le quantità (9) hanno la forma :

$$m'\omega+n'\omega'+\varepsilon\left(\frac{r\omega+s\omega'}{2}\right)+\frac{\alpha}{2}\,\frac{\omega'}{2}-\frac{\gamma}{2}\,\frac{\omega}{2},$$

dove r, s ed ε hanno il significato che loro abbiamo dato precedentemente. Quindi si dimostra in modo analogo la equazione :

$$(10)\qquad \theta_{1,0}(z.\,\Omega',\Omega)=e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\omega\Omega}}\,\theta_{1+\frac{\gamma}{2},\,1+\frac{\alpha}{2}}(z)\,\theta_{1+\frac{\gamma}{2}+r,\,1+\frac{\alpha}{2}+s}(z),$$

e per le equazioni (7) :

$$(11)\qquad \theta_{1,0}\left(\frac{z}{M},\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)=e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{M\omega\Lambda}}\,\theta_{1+\frac{\gamma}{2},\,1+\frac{\alpha}{2}}(z)\,\theta_{1+\frac{\gamma}{2}+r,\,1+\frac{\alpha}{2}+s}(z).$$

2.° Caso. Se $\alpha\equiv1$, $\gamma\equiv0$ sarà $\delta\equiv0$ (mod. 2), e le quantità (9), ponendo $\frac{\gamma}{2}=\varepsilon$, avranno tutte la forma :

$$(12)\qquad m'\omega+n'\omega'+\varepsilon\frac{\omega}{2}\pm\frac{\omega'}{4}.$$

Ora dall'equazione (7) del numero 11, ponendo mente all'equazioni (18) e (19) del numero 7, abbiamo :

$$\frac{\theta^2_{1,1}\left(\pm\frac{\omega'}{4}\right)}{\theta^2_{1,0}\left(\pm\frac{\omega'}{4}\right)}=\pm\frac{1}{k}=-\frac{\theta^2_{0,1}\left(\pm\frac{\omega'}{4}\right)}{\theta^2_{0,0}\left(\pm\frac{\omega'}{4}\right)}=-\frac{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\pm\frac{\omega'}{4}\right)}{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\pm\frac{\omega'}{4}\right)};$$

onde :

$$\frac{\theta^2_{1,1}\left(m'\omega+n'\omega'+\varepsilon\frac{\omega}{2}\pm\frac{\omega'}{4}\right)}{\theta^2_{1,0}\left(m'\omega+n'\omega'+\varepsilon\frac{\omega}{2}\pm\frac{\omega'}{4}\right)}=(-1)^{\varepsilon}\frac{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega'}{4}\right)}{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega'}{4}\right)},$$

e le quantità (12) sono tutte radici della funzione intera:

$$\theta^2_{1,0}(z) - (-1)^\varepsilon \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega'}{4}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega'}{4}\right)} \theta^2_{1,1}(z),$$

e quindi potremo dimostrare nel solito modo, l'equazione:

$$(13) \qquad \theta_{1,0}(z, \Omega', \Omega) = e^{-\frac{\pi i \beta z^2}{\omega\Omega}} \left\{ \theta^2_{1,0}(z) - (-1)^\varepsilon \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega'}{4}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega'}{4}\right)} \theta^2_{1,1}(z) \right\},$$

e per le posizioni (7):

$$(14) \qquad \theta_{1,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{-\frac{\pi i \beta z^2}{\mathrm{M}\omega\Omega}} \left\{ \theta^2_{1,0}(z) - (-1)^\varepsilon \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega'}{4}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega'}{4}\right)} \theta^2_{1,1}(z) \right\}.$$

3° Caso. Se $\alpha \equiv 0$, $\gamma \equiv 1$ sarà $\beta \equiv 0 \pmod{2}$, e le quantità (9), ponendo $\frac{\alpha}{2} = \varepsilon$, prenderanno la forma:

$$(15) \qquad m'\omega + n'\omega + \varepsilon\frac{\omega'}{2} \pm \frac{\omega}{4}.$$

Ora dall'equazione (8) del numero 11, si ricava:

$$\frac{\theta^2_{1,1}\left(\varepsilon\frac{\omega'}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right)}{\theta^2_{1,0}\left(\varepsilon\frac{\omega'}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right)} = \frac{1}{1 + k'};$$

onde:

$$\frac{\theta^2_{1,1}\left(m'\omega + n'\omega' + \varepsilon\frac{\omega'}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right)}{\theta^2_{1,0}\left(m'\omega + n'\omega' + \varepsilon\frac{\omega}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right)} = \frac{1}{1 \pm k'},$$

e quindi le quantità (15) sono tutte radici della funzione intera:

$$\theta^2_{1,0}(z) - (1 \pm k')\, \theta^2_{1,1}(z),$$

e si dimostra nel modo solito:

$$(16) \qquad \theta_{1,0}(z, \Omega', \Omega) = \theta_{1,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{-\frac{\pi i \beta z^2}{\mathrm{M}\omega\Lambda}} \left[\theta^2_{1,0}(z) - (1 \pm k')\theta^2_{1,1}(z)\right].$$

4° Caso. Se $\alpha \equiv \gamma \equiv 1 \pmod{2}$ sarà $\beta \equiv \delta \equiv \varepsilon$, e le quantità (9) avranno tutte la forma:

$$(17)\qquad m'\omega + n'\omega' \pm \left(\frac{\omega}{4} - (-1)^{\varepsilon}\frac{\omega'}{4}\right).$$

Ma dall'equazione (9) del numero 11, si ottiene :

$$\frac{\theta^2_{1,1}\left[\pm\left(\frac{\omega}{4} - (-1)^{\varepsilon}\frac{\omega'}{4}\right)\right]}{\theta^2_{1,0}\left[\pm\left(\frac{\omega}{4} - (-1)^{\varepsilon}\frac{\omega'}{4}\right)\right]} = 1 \pm \frac{ik'}{k},$$

onde :

$$\frac{\theta^2_{1,1}\left[m'\omega + n'\omega' \pm \left(\frac{\omega}{4} - (-1)^{\varepsilon}\frac{\omega'}{4}\right)\right]}{\theta^2_{1,0}\left[m'\omega + n'\omega' \pm \left(\frac{\omega}{4} - (-1)^{\varepsilon}\frac{\omega'}{4}\right)\right]} = 1 \pm \frac{ik'}{k}.$$

e le quantità (17) sono tutte radici della funzione intera :

$$\theta^2_{1,0}(z) - \frac{k}{k \pm ik'}\,\theta^2_{1,1}(z),$$

e quindi si dimostra nel solito modo :

$$(18)\qquad \theta_{1,0}(z, \Omega', \Omega) = \theta_{1,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{-\frac{\pi\beta i z^2}{\mathrm{M}\omega\Lambda}}\left(\theta^2_{1,0}(z) - \frac{k}{k \pm ik'}\,\theta^2_{1,1}(z)\right).$$

Le relazioni delle altre due funzioni $\theta_{0,1}(z, \Omega', \Omega)$, $\theta_{0,0}(z, \Omega', \Omega)$ con le $\theta_{\mu,\nu}(z)$ si possono ottenere in modo analogo, oppure si possono dedurre da quelle, ottenute per le due funzioni $\theta_{1,1}$, $\theta_{1,0}$.

Per la determinazione del moltiplicatore M e del modulo λ della funzione trasformata ci limiteremo ai soli casi ai quali si riducono come vedremo tutti gli altri (num. 19).

Sia $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 2$; avremo $s = 1$, $r = 0$, $\varepsilon = 0$, e quindi

$$(19)\qquad \mathrm{M}\,\theta_{1,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = \theta_{1,1}(z)\,\theta_{1,0}(z), \qquad \theta_{1,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = \theta^2_{1,0}(z) + k\theta^2_{1,1}(z).$$

Pongo $z = \frac{\omega}{2} = \frac{\mathrm{M}\Lambda}{2}$, divido queste equazioni una per l'altra, e ponendo mente all'equazioni (1) e (3) del numero 9, ottengo :

$$(20)\qquad \mathrm{M} = \frac{1}{1+k}, \quad \frac{\mathrm{M}}{\sqrt{\lambda'}} = \frac{1}{k'}$$

onde :

$$(21)\qquad \lambda' = \frac{1-k}{1+k}, \quad \lambda = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}.$$

*

Sia $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 1$; avremo $r = 1$, $s = 0$,

$$(22) \qquad M\,\theta_{1,1}\left(\frac{z}{M}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = \theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,1}(z), \qquad \theta_{1,0}\left(\frac{z}{M}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = \theta_{1,0}^2(z)\,\theta_{0,0}(z);$$

quindi, a cagione della equazione (10) del numero 11:

$$\theta_{1,0}^2\left(\frac{z}{M}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) - k^2 M^2\,\theta_{1,1}\left(\frac{z}{M}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = \theta_{0,0}(2z).$$

Pongo $z = \frac{\omega}{4} = \frac{\Lambda M}{2}$, ho:

$$(23) \qquad \frac{1 - k^2 M}{\lambda'} = \sqrt{k'}.$$

Fo $x = \frac{\omega'}{2} = \frac{\Lambda' M}{2}$ ed osservando che si ha $\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{2\omega'}{\omega}$, dalla prima dell' equazioni (22) ottengo:

$$(24) \qquad \frac{M}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{k}.$$

Dall'equazioni (23), e (24) si ricava:

$$(25) \qquad M = \frac{1}{1 + k'}, \qquad (26) \qquad \lambda = \frac{1 - k'}{1 + k'}.$$

18.

Determiniamo ora le trasformazioni di ordine primo dispari p; cioè essendo:

$$(1) \qquad \omega = \alpha\Omega + \beta\Omega', \qquad \omega' = \gamma\Omega + \delta\Omega';$$

$$(2) \qquad \alpha\delta = \beta\gamma = p;$$

p numero primo dispari qualunque, cerchiamo la relazione che esiste tra la funzione $\theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega)$, e le funzioni $\theta_{\mu,\nu}(z)$.

Le radici della funzione $\theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega)$ sono tutte e sole le quantità:

$$(3) \qquad (2m + \mu - 1)\frac{\Omega}{2} + (2n + \nu - 1)\frac{\Omega'}{2}$$

$$= \Big((2m + \mu - 1)\delta - (2n + \nu - 1)\gamma\Big)\frac{\omega}{2p} + \Big((2n + \nu - 1)\alpha - (2m + \mu - 1)\beta\Big)\frac{\omega'}{2p}.$$

Se prendiamo per r ed s i valori minori di μ, ma ambedue non eguali a zero contemporaneamente, che sodisfano alle congruenze:

$$(4) \qquad \begin{cases} r\alpha + s\gamma \equiv 0 \\ r\beta + s\delta \equiv 0 \end{cases} \pmod{p},$$

il che è sempre possibile a cagione dell'equazione (2), e indichiamo con t' un numero

intero minore di p, avremo:

$$\begin{matrix} m\delta - n\gamma \equiv t'r \\ n\alpha - m\beta \equiv t's \end{matrix} \pmod{p};$$

ed essendo t'' un numero intero minore di p, sarà:

$$(\mu-1)\delta-(\nu-1)\gamma=(2l+\mu'-1)p+2t''r$$
$$(\nu-1)\alpha-(\mu-1)\beta=(2l'+\nu'-1)p+2t''s;$$

e quindi le quantità (3) prendono tutte la forma:

$$(5)\qquad m'\omega+n'\omega'+t\left(\frac{r\omega+s\omega'}{p}\right)+\frac{(\mu'-1)\omega+(\nu'-1)\omega'}{2},$$

dove:

$$\begin{matrix} \mu'-1\equiv(\mu-1)\delta-(\nu-1)\gamma \\ \nu'-1\equiv(\nu-1)\alpha-(\mu-1)\beta \end{matrix} \pmod{2};$$

ossia:

$$(6)\qquad \begin{matrix} \mu'\equiv\delta\mu+\nu\gamma+\gamma\delta \\ \nu'\equiv\nu\alpha+\mu\beta+\alpha\beta \end{matrix} \pmod{2};$$

e per t bisogna prendere tutti i p residui differenti rispetto al modulo p.

Ora le quantità (5) sono tutte le radici anche della funzione intera:

$$\prod_{0}^{p-1}{}_t\, \theta_{\mu',\nu'}\left[z+t\left(\frac{r\omega+s\omega'}{p}\right)\right],$$

quindi avremo:

$$(7)\qquad \theta_{\mu,\nu}(z,\Omega',\Omega)=\varphi(z)\prod_{0}^{p-1}{}_t\,\theta_{\mu',\nu'}\left[z+t\left(\frac{r\omega+s\omega'}{p}\right)\right].$$

dove $\varphi(z)$ è una funzione intera che non ha radici finite.

Mutando z in $z+\omega$ nella equazione (7), ottengo:

$$(-1)^{\nu\alpha+\mu\beta}e^{-\frac{\pi i\beta}{\Omega}(2z+\beta\Omega')}\theta_{\mu,\nu}(z,\Omega',\Omega)=(-1)^{\nu'}\varphi(z+\omega)\prod_{0}^{p-1}{}_t\,\theta_{\mu',\nu'}\left[z+t\left(\frac{r\omega+s\omega'}{p}\right)\right].$$

Dividendo per la (7), e osservando la seconda congruenza (6) e l'equazioni (1), si ottiene:

$$(8)\qquad \varphi(z+\omega)=e^{-\frac{\pi i\beta\omega}{\omega\Omega}(2z+\omega)}\varphi(z).$$

Mutando z in $z+\omega'$ la equazione (7) diviene:

$$(-1)^{\nu\gamma+\mu\delta}e^{-\frac{\pi i\delta}{\Omega}(2z+\delta\Omega')}\theta_{\mu,\nu}(z,\Omega',\Omega)$$

$$=(-1)^{\mu'}e^{-\frac{\pi i p}{\omega}\left[2z+(p-1)\left(\frac{r\omega+s\omega'}{p}\right)+\omega'\right]}\varphi(z+\omega')\prod_{0}^{p-1}\theta_{\mu',\nu'}\left[z+t\left(\frac{r\omega+s\omega'}{p}\right)\right];$$

onde:

$$\theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega) = e^{\frac{\pi i \beta \omega'}{\omega \Omega}(2z+\omega') - (p-1)\frac{\pi i s \omega'}{\omega}} \varphi(z+\omega') \prod_0^{p-1} \theta_{\mu',\nu'}\left[z + t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right)\right]$$

e dividendo per la equazione (7):

$$(9) \qquad \varphi(z+\omega') = e^{-\frac{\pi i \beta \omega'}{\omega \Omega}(2z+\omega') + (p-1)\frac{\pi i s \omega'}{\omega}}.$$

Ponendo:

$$\varphi(z) = e^{-\frac{\pi i \beta z^2}{\omega \Omega} + \frac{(p-1)\pi i s z}{\omega}} \psi(z),$$

si ha dall'equazioni (8) e (9):

$$\psi(z+\omega) = \psi(z), \qquad \psi(z+\omega') = \psi(z),$$

onde $\psi(z)$, essendo funzione intera, per il teorema 4 del n.º 3, sarà una costante C, e quindi:

$$\theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega) = \mathrm{C} e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(\frac{\beta z^2}{\Omega} - (p-1)sz\right)} \prod_{t\,0}^{p-1} \theta_{\mu',\nu'}\left[z + t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right)\right].$$

Se $\mu\nu \equiv \mu'\nu' \equiv 1$, divido per z e pongo $z = 0$, se $\mu\nu \equiv \mu'\nu' \equiv 0$ pongo $z = 0$, ed ho:

$$\frac{1}{\mathrm{C}} = \prod_{t\,1}^{p-1} \theta_{\mu',\nu'}\left[t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right)\right];$$

dunque finalmente:

$$(10) \qquad \theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega) = e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(\frac{\beta z^2}{\Omega} - (p-1)sz\right)} \prod_{t\,0}^{p-1} \frac{\theta_{\mu',\nu'}\left[z + t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right)\right]}{\prod_{t\,1}^{p-1} \theta_{\mu',\nu'}\left[t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right)\right]}.$$

Pongo:

$$(11) \qquad \frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{\Lambda'}{\Lambda}, \quad \frac{\Omega}{\Lambda} = \mathrm{M}, \qquad \theta_{1,1}\left(\frac{\Lambda}{2}, \Lambda', \Lambda\right) = \theta_{1,0}\left(\frac{\Lambda}{2}, \Lambda', \Lambda\right),$$

ed ho:

$$(12) \qquad \mathrm{M}\,\theta_{1,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(\frac{\beta z^2}{\mathrm{M}\Lambda} - (p-1)sz\right)} \prod_{t\,0}^{p-1} \frac{\theta_{1,1}\left[z + t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right)\right]}{\prod_{t\,1}^{p-1} \theta_{1,1}\left[t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right)\right]},$$

$$(13) \qquad \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(\frac{\beta z^2}{\mathrm{M}\Lambda} - (p-1)sz\right)} \prod_{t\,0}^{p-1} \frac{\theta_{\mu',\nu'}\left[z + t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right)\right]}{\theta_{\mu',\nu'}\left[t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right)\right]};$$

$$\mu\nu \equiv \mu'\nu' \equiv 0 \pmod{2}.$$

Qualunque siano i numeri interi α, β, γ, δ e in conseguenza i numeri r ed s, le trasformazioni differenti di ordine primo dispari p non possono essere in numero maggiore di $p+1$.

Infatti è facile a vedersi che quando $s=0$, sono identici i secondi membri delle equazioni (12) e (13) qualunque siano i valori di r, e che quando s è differente da zero sono identiche tutte quelle trasformazioni per le quali lo stesso valore di σ rende:

$$(a) \qquad s\sigma \equiv r \ (\text{mod.}\ p).$$

Qnindi, quando è sodisfatta questa congruenza ponendo:

$$\varpi_\sigma = \frac{\omega' + \sigma\omega}{p},$$

e quando $s=0$:

$$\varpi_\infty = \frac{\omega}{p},$$

avremo soltanto $p+1$ trasformazioni differenti corrispondenti ai p valori di σ eguali ai differenti residui rispetto al modulo p, e a $\sigma = \infty$.

Le formule (12) e (13) divengono:

$$(14) \qquad \mathrm{M}_\sigma \theta_{1,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma}, \frac{\Lambda'_\sigma}{\Lambda_\sigma}\right) = e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(\frac{\beta z^2}{\mathrm{M}_\sigma \Lambda_\sigma} - (p-1)z\right)} \frac{\prod_0^{p-1}{}_t\, \theta_{1,1}(z + t\varpi_\sigma)}{\prod_1^{p-1}{}_t\, \theta_{1,1}(t\varpi_\sigma)},$$

$$(15) \qquad \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma}, \frac{\Lambda_\sigma}{\Lambda_\sigma}\right) = e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(\frac{\beta z^2}{\mathrm{M}_\sigma \Lambda_\sigma} - (p-1)z\right)} \prod_0^{p-1}{}_t \frac{\theta_{\mu',\nu'}(z + t\omega_\sigma)}{\theta_{\mu',\nu'}(t\varpi_\sigma)},$$

$$(16) \qquad \mathrm{M}_\infty \theta_{1,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\infty}, \frac{\Lambda'_\infty}{\Lambda_\infty}\right) = e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\mathrm{M}_\infty \omega \Lambda_\infty}} \frac{\prod_0^{p-1}{}_t\, \theta_{1,1}(z + t\varpi_\infty)}{\prod_1^{p-1}{}_t\, \theta_{1,1}(t\varpi_\infty)},$$

$$(17) \qquad \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\infty}, \frac{\Lambda'_\infty}{\Lambda_\infty}\right) = e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\mathrm{M}_\infty \omega \Lambda_\infty}} \prod_0^{p-1}{}_t \frac{\theta_{\mu',\nu'}(z + t\varpi_\sigma)}{\theta_{\mu',\nu'}(t\varpi_\sigma)}.$$

Queste formule possono trasformarsi in modo che contengano nel secondo membro soltanto razionalmente funzioni Jacobiane tutte dello stesso argomento z.

Infatti, l'equazioni caratteristiche delle $\theta_{\mu,\nu}$ danno:

$$\frac{\theta_{\mu,\nu}[z+(p-t)\varpi_\sigma]}{\theta_{\mu,\nu}[(p-t)\varpi_\sigma]}=(-1)^{\mu\nu}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\frac{\theta_{\mu,\nu}(z-t\varpi_\sigma)}{\theta_{\mu,\nu}(t\varpi_\sigma)},$$

$$\frac{\theta_{\mu,\nu}[z+(p-t)\varpi_\infty]}{\theta_{\mu,\nu}[(p-t)\varpi_\infty]}=(-1)^{\mu\nu}\frac{\theta_{\mu,\nu}(z-t\varpi_\infty)}{\theta_{\mu,\nu}(t\varpi_\infty)};$$

quindi sostituendo nei secondi membri delle formule (14), (15), (16) e (17) ai fattori nei quali $t>\frac{p-1}{2}$ i valori dati da queste equazioni, abbiamo per qualunque valore di σ:

$$(18)\qquad \mathrm{M}_\sigma\,\theta_{1,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\frac{\Lambda'_\sigma}{\Lambda_\sigma}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\mathrm{M}_\sigma\omega\Lambda_\sigma}}\theta_{1,1}(z)\prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_t\frac{\theta_{1,1}(z+t\varpi_\sigma)\,\theta_{1,1}(z-t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)}$$

$$(19)\qquad \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\frac{\Lambda'_\sigma}{\Lambda_\sigma}\right)=e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\mathrm{M}_\sigma\omega\Lambda_\sigma}}\theta_{\mu',\nu'}(z)\prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_t\frac{\theta_{\mu',\nu'}(z+t\varpi_\sigma)\,\theta_{\mu',\nu'}(z-t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{\mu',\nu'}(t\varpi_\sigma)}.$$

Ma dall'equazioni (6) del numero 11, si ha:

$$\frac{\theta_{1,1}(z+t\varpi_\sigma)\,\theta_{1,1}(z-t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)}=\frac{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)}\theta^2_{1,1}(z)-\theta^2_{1,0}(z),$$

$$\frac{\theta_{1,0}(z+t\varpi_\sigma)\,\theta_{1,0}(z-t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\sigma)}=\theta^2_{1,0}(z)-k^2\frac{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\sigma)}\theta^2_{1,1}(z),$$

$$\frac{\theta_{0,1}(z+t\varpi_\sigma)\,\theta_{0,1}(z-t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{0,1}(t\varpi_\sigma)}=\theta^2_{1,0}(z)-\frac{\theta^2_{0,0}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{0,1}(t\varpi_\sigma)}\theta^2_{1,1}(z),$$

$$\frac{\theta_{0,0}(z+t\varpi_\sigma)\,\theta_{0,0}(z-t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{0,0}(t\varpi_\sigma)}=\theta^2_{1,0}(z)-k^2\frac{\theta^2_{0,1}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{0,0}(t\varpi_\sigma)}\theta^2_{1,1}(z);$$

onde l'equazioni (18) e (19) daranno:

$$(20)\qquad \mathrm{M}_\sigma\,\theta_{1,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\frac{\Lambda'_\sigma}{\Lambda_\sigma}\right)=e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\mathrm{M}_\sigma\omega\Lambda_\sigma}}\theta_{1,1}(z)\prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_t\left(\theta^2_{1,0}(z)-\frac{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)}\theta^2_{1,1}(z)\right),$$

$$(21)\qquad \theta_{1,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\frac{\Lambda'_\sigma}{\Lambda_\sigma}\right)=e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\mathrm{M}_\sigma\omega\Lambda_\sigma}}\theta_{1,0}(z)\prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_t\left(\theta^2_{1,0}(z)-k^2\frac{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\sigma)}\theta^2_{1,1}(z)\right),$$

$$(22)\qquad \theta_{0,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\frac{\Lambda'_\sigma}{\Lambda_\sigma}\right)=e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\mathrm{M}_\sigma\omega\Lambda_\sigma}}\theta_{0,1}(z)\prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_t\left(\theta^2_{1,0}(z)-\frac{\theta^2_{0,0}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{0,1}(t\varpi_\sigma)}\theta^2_{1,1}(z)\right),$$

$$(23)\qquad \theta_{0,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\frac{\Lambda'_\sigma}{\Lambda_\sigma}\right)=e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\mathrm{M}_\sigma\omega\Lambda_\sigma}}\theta_{0,0}(z)\prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_t\left(\theta^2_{1,0}(z)-k^2\frac{\theta^2_{0,1}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{0,0}(t\varpi_\sigma)}\theta^2_{1,1}(z)\right).$$

19.

Prima di passare alla determinazione del moltiplicatore M_σ e del modulo λ_σ delle funzioni Jacobiane trasformate, converrà osservare che relativamente ai valori di α, β, γ e δ basta limitarsi a due soli casi distinti, come risulta dal seguente teorema:

Ogni trasformazione di ordine primo p equivale a due trasformazioni successive, una di primo ordine, e l'altra della forma :

$$(1) \qquad \omega = \Omega\,, \qquad \omega' = \rho\Omega + p\Omega'\,,$$

oppure della forma :

$$(2) \qquad \omega = p\Omega\,, \qquad \omega' = \Omega'.$$

Infatti, sia una trasformazione qualunque di ordine primo p :

$$(3) \qquad \omega = \alpha\Omega + \beta\Omega'\,, \qquad \omega' = \gamma\Omega + \delta\Omega',$$

$$(4) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = p.$$

Essendo p un numero primo, α e β o saranno primi tra loro, o avranno p per massimo comun divisore.

Se α e β sono primi tra loro, potrà risolversi in numeri interi, rispetto a γ' e δ' l'equazione :

$$\alpha\delta' - \beta\gamma' = 1\,,$$

e quindi γ e δ avranno la forma :

$$\gamma = \gamma' p + \rho\alpha\,, \qquad \delta = \delta' p + \rho\beta\,,$$

essendo ρ un intero qualunque $< p$, che sodisfarà le due congruenze :

$$(5) \qquad \rho\alpha - \gamma \equiv 0\,, \qquad \rho\beta - \delta \equiv 0 \ (\text{mod.}\, p).$$

Ora è chiaro che le due trasformazioni successive, la prima di prim'ordine :

$$\omega_1 = \alpha\Omega + \beta\Omega', \qquad \omega'_1 = \gamma'\Omega + \delta'\Omega';$$

la seconda di ordine p e della forma :

$$\omega = \omega_1\,, \qquad \omega' = \rho\omega_1 + p\omega'_1$$

equivarranno alla unica trasformazione (3).

Se α e β hanno per massimo comun divisore il numero p, sarà :

$$\alpha = p\alpha'\,, \qquad \beta = p\beta'\,, \qquad \alpha'\delta - \beta'\gamma = 1\,,$$

e le due trasformazioni successive :

$$\omega_1 = \alpha'\Omega + \beta'\Omega'\,, \qquad \omega'_1 = \gamma\Omega + \delta\Omega'$$

di primo ordine , e :

$$\omega = p\omega_1 , \qquad \omega' = \omega'_1 ,$$

di ordine p, equivarranno alla unica trasformazione (3).

Dunque nelle trasformazioni di ordine primo p, relativamente ai valori di α, β, γ e δ basterà limitarsi ai soli casi seguenti:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma < p, \quad \delta = p ,$$
$$\alpha = p , \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 1.$$

Confrontando le congruenze (4) ed (a) del numero precedente colle congruenze (5) abbiamo:

$$(6) \qquad \rho \equiv - \sigma \pmod{p},$$

e le congruenze (6) del numero precedente danno:

$$\mu' \equiv \mu , \quad \nu' \equiv \nu \pmod{2}.$$

Poniamo nelle formule (18) e (19) del numero precedente:

$$z = \frac{\omega}{2}.$$

Per la trasformazione (1) avremo:

$$z = \frac{\Lambda_\sigma M_\sigma}{2} ,$$

e per la trasformazione (2):

$$z = \frac{p\Lambda_\infty M_\infty}{2} .$$

Quindi dividendo l'equazione (18) per la (19) in cui sia posto $\mu = \mu' = 1$, $\nu = \nu' = 0$, avremo:

$$M_\sigma = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)} \frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2} + t\varpi_\sigma\right) \theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2} - t\varpi_\sigma\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2} + t\varpi_\sigma\right) \theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2} - t\varpi_\sigma\right)} ,$$

$$M_\infty = \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\infty)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\infty)} \frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2} + t\varpi_\infty\right) \theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2} - t\varpi_\infty\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2} + t\varpi_\infty\right) \theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2} - t\varpi_\infty\right)} ;$$

ed essendo:

$$\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2} \pm x\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2} \pm x\right)} = \frac{\theta_{0,1}(x)}{\theta_{0,0}(x)},$$

sarà:

$$(7)\qquad M_\sigma = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\sigma)\,\theta^2_{0,1}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)\,\theta^2_{0,0}(t\varpi_\sigma)},$$

$$(8)\qquad M_\infty = \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\infty)\,\theta^2_{0,1}(t\varpi_\infty)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\infty)\,\theta^2_{0,0}(t\varpi_\infty)}.$$

Poichè il segno del moltiplicatore non muta le formule (18) e (19) del numero precedente quando $\beta = 0$, potremo per uniformità prendere:

$$M_\infty = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{\Omega_\infty}{\Lambda_\infty},$$

e così avremo M dato sempre dalla medesima formula:

$$(9)\qquad M_\sigma = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\sigma)\,\theta^2_{0,1}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)\,\theta^2_{0,0}(t\varpi_\sigma)}.$$

Ponendo nella equazione (19) del numero precedente $\mu = 0$, $\nu = 0$, e quindi $\mu = 1$, $\nu = 0$, dividendo l'una per l'altra l'equazioni ottenute, e osservando la equazione (13) del numero 8, abbiamo:

$$(10)\qquad \lambda'^2_\sigma = k'^{2p} \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\theta^8_{1,0}(t\varpi_\sigma)}{\theta^8_{0,0}(t\varpi_\sigma)}.$$

Prendendo nell'equazioni (18) e (19) dove $\mu = 0$, $\nu = 1$:

$$z = \frac{\omega + \omega'}{2}$$

e quindi:

$$z = \frac{pM_\sigma \Lambda'_\sigma + (\rho + 1)M_\sigma \Lambda_\sigma}{2}, \qquad z = \frac{M_\sigma \Lambda'_\infty + p\Lambda_\infty M_\infty}{2},$$

dividendo l'equazioni ottenute una per l'altra, osservando l'equazione (8) del numero 8, e prendendo ρ pari, si ottiene:

$$(11)\qquad \lambda^2_\sigma = k^{2p} \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\theta^8_{0,1}(t\varpi_\sigma)}{\theta^8_{0,0}(t\varpi_\sigma)}.$$

Il moltiplicatore M_σ, e i moduli λ_σ e λ'_σ della funzione trasformata si possono esprimere facilmente per mezzo della quantità $q = e^{\frac{\pi i \omega'}{\omega}}$.

Infatti riprendiamo dalle formule (6), (8) e (12) del numero 8, e ricaviamo dalle formule (16) del numero 10 i valori di ω, k e k' espressi per la quantità q:

*

$$(12) \qquad \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} = \prod_{1}^{\infty} \frac{(1+q^{2n-1})(1-q^{2n})}{(1-q^{2n-1})(1+q^{2n})} = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2},$$

$$(13) \qquad \sqrt{k} = 2\sqrt[4]{q}\prod_{1}^{\infty} \frac{(1+q^{2n})^2}{1+q^{2n-1})^2} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}}{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2}},$$

$$(14) \qquad \sqrt{k'} = \prod_{1}^{\infty} \frac{(1-q^{2n-1})^2}{(1+q^{2n-1})^2} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{m^2}}{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2}}.$$

Ora se poniamo:

$$q_\sigma = e^{\frac{\pi i \Omega'_\sigma}{\Omega_\sigma}} = e^{\frac{\pi i \Lambda'_\sigma}{\Lambda_\sigma}}$$

sarà:

$$q_\sigma = e^{\pi i \left(\frac{\omega'}{p\omega} + \frac{\sigma}{p}\right)} = q^{\frac{1}{p}} \alpha^{\frac{\sigma}{2}}, \quad q_\infty = e^{\pi i \frac{p\omega'}{\omega}} = q^p$$

essendo α una radice immaginaria p^{esima} dell'unità; ed essendo σ un numero pari, e quindi $\frac{\sigma}{2}$ un intero h, avremo che i valori di q per le funzioni Jacobiane trasformate saranno della forma q^p e $\alpha^h\, q^{\frac{1}{p}}$, quindi:

$$(15) \qquad \sqrt{\frac{\Lambda_\sigma}{\pi}} = \prod_{1}^{\infty} \frac{(1+q^{\frac{(2n-1)}{p}}\alpha^{(2n-1)h})^2(1-q^{\frac{2n}{p}}\alpha^{2nh})^2}{(1-q^{\frac{2n-1}{p}}\alpha^{(2n-1)h})^2(1+q^{\frac{2n}{p}}\alpha^{2nh})^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{m^2}{p}}\alpha^{m^2h},$$

$$(16) \qquad \sqrt{\frac{\Lambda_\infty}{\pi}} = \prod_{1}^{\infty} \frac{(1+q^{(2n-1)p})^2(1-q^{2np})^2}{(1-q^{(2n-1)p})^2(1+q^{2np})^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2p},$$

$$(17) \qquad \sqrt{\lambda_\sigma} = 2\sqrt[4]{q^{\frac{1}{p}}}\,\alpha^h \prod_{1}^{\infty} \frac{(1+q^{\frac{2n}{p}}\alpha^{2nh})^2}{(1+q^{\left(\frac{2n-1}{p}\right)}\alpha^{(2n-1)h})^2} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{1}{p}\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}\alpha^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2h}}{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{m^2}{p}}\alpha^{m^2h}},$$

$$(18) \qquad \sqrt{\lambda_\infty} = 2\sqrt[4]{q^p}\prod_{1}^{\infty} \frac{(1+q^{2np})^2}{(1+q^{(2n-1)p})^2} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2p}}{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2p}},$$

$$(19)\qquad \sqrt{\lambda'_\sigma} = \prod_1^\infty \frac{\left(1 - q^{\left(\frac{2n-1}{p}\right)}\alpha^{(2n-1)h}\right)^2}{\left(+ q^{\frac{2n-1}{p}}\alpha^{(2n-1)h}\right)^2} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty}(q-1)^m q^{\frac{m^2}{p}}\alpha^{m^2h}}{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{m^2}{p}}\alpha^{m^2h}},$$

$$(20)\qquad \sqrt{\lambda'_\infty} = \prod_1^\infty \frac{\left(1 - q^{(2n-1)p}\right)^2}{\left(1 + q^{(2n-1)p}\right)^2} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{m^2p}}{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2p}}.$$

I moltiplicatori M_σ saranno dati dalle formule:

$$M_\sigma = \frac{\Omega_\sigma}{\Lambda_\sigma} = \frac{\omega}{\Lambda_\sigma}, \qquad M_\infty = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{\Omega_\infty}{\Lambda_\infty} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{\omega}{p\Lambda_\infty},$$

onde dall'equazioni (12), (15) e (16) avremo:

$$(21)\qquad \sqrt{\frac{1}{M_\sigma}} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{m^2}{p}}\alpha^{m^2h}}{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2}}, \qquad (22)\qquad \sqrt{\frac{1}{M_\infty}} = \frac{\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}\sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2p}}{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2}}.$$

Per mezzo dell'equazione (5) del numero 14, considerando λ_σ come funzione di k, k di q e q di q_σ, si ottiene facilmente la relazione:

$$(23)\qquad M_\sigma^2 = \frac{1}{p}\,\frac{\lambda_\sigma\,\lambda'^2_\sigma}{k\,k'^2}\,\frac{dk}{d\lambda_\sigma}.$$

20.

Le due trasformazioni corrispondenti a $\sigma = 0$ ed a $\sigma = \infty$ effettuate successivamente danno la moltiplicazione dell'argomento.

Infatti, sia:

$$(1)\qquad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{p\Lambda'}{\Lambda}, \qquad \theta_{1,1}\left(\frac{\Lambda}{2}, \Lambda', \Lambda\right) = \theta_{1.0}\left(\frac{\Lambda}{2}, \Lambda', \Lambda\right),$$

avremo dalle formule (14) e (15) del numero 18:

$$(2)\qquad \begin{cases} M_0\,\theta_{1,1}\left(\dfrac{z}{M_0}, \dfrac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{(p-1)\frac{\pi i z}{\omega}}\,\theta_{1,1}(z)\displaystyle\prod_{1}^{p-1}{}_\alpha \frac{\theta_{1,1}\left(z + \frac{\alpha\omega'}{p}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)}, \\[2ex] \theta_{\mu,\nu}\left(\dfrac{z}{M_0}, \dfrac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{(p-1)\frac{\pi i z}{\omega}}\displaystyle\prod_{0}^{p-1}{}_\alpha \frac{\theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\alpha\omega'}{p}\right)}{\theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)}, \quad \mu\nu = 0 \\[2ex] M_0 = \dfrac{\omega}{\Lambda} \end{cases}$$

Dalla equazione (1) abbiamo anche:

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{\omega'}{p\omega},$$

quindi dalle formule (16), (17) del numero 18, si deduce:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &M_\infty \theta_{1,1}\left(\frac{z}{M_\infty}\right) = \theta_{1,1}\left(z, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) \prod_{1}^{p-1}{}_{\beta} \frac{\theta_{1,1}\left(z + \frac{\beta\Lambda}{p}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\beta\Lambda}{p}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)}, \\ &\theta_{\mu,\nu}\left(\frac{z}{M_\infty}\right) = \prod_{0}^{p-1}{}_{\beta} \frac{\theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\beta\Lambda}{p}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)}{\theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\beta\Lambda}{p}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)}, \qquad \mu\nu = 0 \\ &M_\infty = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{\Lambda}{p\omega}. \end{aligned}\right.$$

Ponendo nell'equazioni (3) $\frac{z}{M_0}$ invece di z, sostituendo nei secondi membri i valori dati dall'equazioni (2), e osservando che si ha:

$$M_0 M_\infty = \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p}, \quad M_0 \Lambda = \omega,$$

otterremo:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\theta_{1,1}(pz) = \frac{p e^{p(p-1)\frac{\pi i z}{\omega}} \prod_{0}^{p-1}{}_{\alpha} \prod_{0}^{p-1}{}_{\beta} \theta_{1,1}\left(z + \frac{\alpha\omega' + \beta\omega}{p}\right)}{M_0^{p-1} \prod_{1}^{p-1}{}_{\beta} \theta_{1,1}\left(\frac{\beta\Lambda}{p}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) \left\{\prod_{1}^{p-1}{}_{\alpha} \theta_{1,1}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)\right\}^p}, \\ &\theta_{\mu,\nu}(pz) = \frac{e^{p(p-1)\frac{\pi i z}{\omega}} \prod_{0}^{p-1}{}_{\alpha} \prod_{0}^{p-1}{}_{\beta} \theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\alpha\omega' + \beta\omega}{p}\right)}{\prod_{1}^{p-1}{}_{\beta} \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\beta\Lambda}{p}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) \left\{\prod_{1}^{p-1}{}_{\alpha} \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)\right\}^p}, \quad \mu\nu = 0. \end{aligned}\right.$$

Confrontando l'equazioni (4) coll'equazioni (6) del numero 15, abbiamo:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\prod_{0}^{p-1}{}'_{\alpha} \prod_{0}^{p-1}{}'_{\beta} \theta_{1,1}\left(\frac{\alpha\omega' + \beta\omega}{p}\right) = M_0^{p-1} \prod_{1}^{p-1}{}_{\beta} \theta_{1,1}\left(\frac{\beta\Lambda}{p}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) \left\{\prod_{1}^{p-1}{}_{\alpha} \theta_{1,1}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)\right\}^p, \\ &\prod_{0}^{p-1}{}'_{\alpha} \prod_{0}^{p-1}{}_{\beta} \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\alpha\omega' + \beta\omega}{p}\right) = \prod_{1}^{p-1}{}_{\beta} \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\beta\Lambda}{p}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) \left\{\prod_{1}^{p-1}{}_{\alpha} \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)\right\}^p. \end{aligned}\right.$$

Ponendo :

$$\prod_{1}^{p-1}{}_{\alpha}\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)}=\mathrm{A}\,,\quad \prod_{1}^{p-1}{}_{\alpha}\frac{\theta_{0,1}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)}=\mathrm{B}\,,\quad \prod_{1}^{p-1}{}_{\alpha}\frac{\theta_{0,0}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)}=\mathrm{C}\,;$$

$$\prod_{1}^{p-1}{}_{\beta}\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\beta\Lambda}{p},\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\beta\Lambda}{p},\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)}=\mathrm{P}\,,\quad \prod_{1}^{p-1}{}_{\beta}\frac{\theta_{9,1}\left(\frac{\beta\Lambda}{p},\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\beta\Lambda}{p},\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)}=\mathrm{Q}\,,\quad \prod_{1}^{p-1}{}_{\beta}\frac{\theta_{0,0}\left(\frac{\beta\Lambda}{p},\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\beta\Lambda}{p},\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)}=\mathrm{R},$$

e indicando con λ e λ' i moduli di $\theta_{\mu,\nu}\left(z,\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)$, e con k e k' quelli di $\theta_{\mu,\nu}(z)$, si ha dalle formule (9), (10) e (11) del numero 19 :

$$\mathrm{M}_0=\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{AC}}\,,\quad \sqrt{\lambda}=\sqrt{k^p}\,\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}\,,\quad \sqrt{\lambda'}=\frac{\sqrt{k'^p}}{\mathrm{C}}$$

$$\mathrm{M}_\infty=\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{PR}}\,,\quad \sqrt{k}=\sqrt{\lambda^p}\,\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}},\quad \sqrt{k'}=\frac{\sqrt{\lambda'^p}}{\mathrm{R}}\,,\qquad \frac{\mathrm{QB}}{\mathrm{ACPR}}=\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p}\,;$$

onde dalle (5) si ottiene :

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}
&\prod_{0}^{p-1}{}'_{\alpha}\prod_{0}^{p-1}{}'_{\beta}\,\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\alpha\omega'+\beta\omega}{p}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\alpha\omega'+k\omega'}{p}\right)}=\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}{\sqrt{k^{p^2-1}}}\,,\\
&\prod_{0}^{p-1}{}'_{\alpha}\prod_{0}^{p-1}{}'_{\alpha}\,\frac{\theta_{0,1}\left(\frac{\alpha\omega'+\beta\omega}{p}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\alpha\omega'+\beta\omega}{p}\right)}=\sqrt{\frac{k'^{p^2-1}}{k^{p^2-1}}}\,,\\
&\prod_{0}^{p-1}{}'_{\alpha}\prod_{0}^{p-1}{}'_{\beta}\,\frac{\theta_{0,0}\left(\frac{\alpha\omega'+\beta\omega}{p}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\alpha\omega'+\beta\omega}{p}\right)}=\sqrt{k'^{p^2-1}}\,.
\end{aligned}\right.$$

(Continua).



LA TEORICA DEI COVARIANTI E DEGLI INVARIANTI DELLE FORME BINARIE E LE SUE PRINCIPALI APPLICAZIONI.

MONOGRAFIA

DEL SIG. PROF. FRANCESCO BRIOSCHI.

(Continuazione V. Tom. II. pag. 277).



CAP. VI. DEI COVARIANTI E DEGLI INVARIANTI IRREDUCIBILI.

1.° Un covariante od un invariante di una data forma dicesi *irreducibile* allorquando sia impossibile l'esprimere il medesimo in funzione razionale, intiera di altri covarianti, ed invarianti della forma stessa.

Considerando la forma dell'ennesimo grado, sieno per la medesima C_1, C_2 .... i numeri di tutti i covarianti indipendenti dei gradi primo, secondo ec., e γ_1, γ_2 .... i numeri di tutti i covarianti irreducibili dei gradi primo, secondo ec.; qualunque sia l'ordine dei medesimi, e quindi compresevi gli invarianti. Denomineremo con X_1, Y_1, Z_1 . . . i γ_1 covarianti irreducibili di primo grado; con X_2, Y_2, Z_2... i γ_2 covarianti irreducibili del secondo grado ec. È evidente che i C_1 covarianti indipendenti di primo grado sono tutti covarianti irreducibili, giacchè se uno di essi potesse esprimersi in funzione razionale, intiera di altri, la relazione non potrebbe essere che lineare, ed in questo caso quel covariante non potrebbe essere indipendente, il che abbiamo supposto aver luogo per tutti i C_1 covarianti. Quindi si avrà:

$$(65) \qquad \gamma_1 = C_1.$$

Combinando due a due i γ_1 covarianti irreducibili di primo grado X_1, Y_1 . . . . si otterranno $\frac{1}{2}\gamma_1(\gamma_1+1)$ covarianti composti di secondo grado X_1^2, Y_1^2 .... $X_1 Y_1$ .... dei quali, in generale, alcuni saranno indipendenti, altri legati da relazioni lineari. Sieno μ_2 il numero degli indipendenti, e si abbiano le ν_2 relazioni lineari:

$$A_2 = h_1 X_1^2 + k_1 Y_1^2 + l_1 X_1 Y_1 + \ldots\ldots = 0$$
$$B_2 = h_2 X_1^2 + k_2 Y_1^2 + l_2 X_2 Y_2 + \ldots\ldots = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

si avrà:

$$\tfrac{1}{2}\gamma_1(\gamma_1+1) = \mu_2 + \nu_2$$

ed evidentemente:

$$\gamma_2 = C_2 - \mu_2,$$

dalle quali:

$$(66) \qquad \gamma_2 - \nu_2 = C_2 - \tfrac{1}{2}\gamma_1(\gamma_1+1).$$

Combinando fra loro tre a tre i γ_1 covarianti irreducibili di primo grado, si ottengono i covarianti composti del terzo grado X_1^3, Y_1^3, $X_1^2 Y_1 \ldots$ in numero

$$\frac{1}{2.\,3}\gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_1+2);$$

e combinando i γ_1 covarianti irreducibili del primo grado, coi γ_2 del secondo grado, si hanno i covarianti composti del terzo grado $X_1 X_2$, $X_1 Y_2$, $X_2 Y_1 \ldots.$ in numero $\gamma_1 \gamma_2$, quindi il numero totale dei covarianti composti sarà:

$$\frac{1}{2.\,3}\gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_1+2)+\gamma_1\gamma_2 .$$

Fra questi covarianti composti sussistono necessariamente alcune relazioni lineari le quali sono conseguenze delle $A_2=0$, $B_2=0 \ldots.$ cioè le:

$$X_1 A_2 = 0 , \qquad X_1 B_2 = 0 \ldots .$$

evidentemente in numero $\gamma_1 \nu_2$; quindi supponendo che dei medesimi covarianti composti un numero μ_3 sieno indipendenti, e si abbiano le ν_3 nuove relazioni lineari:

$$A_3 = a_1 X_1^3 + b_1 X_1^2 Y_1 + c_1 Y_1^3 + d_1 X_1 X_2 + \ldots . = 0$$
$$B_5 = a_2 X_1^3 + b_2 X_1^2 Y_1 + c_2 Y_1^3 + d_2 X_1 X_2 + \ldots . = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

si avrà:

$$\frac{1}{2.\,3}\gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_1+2)+\gamma_1\gamma_2 = \mu_3+\nu_3+\gamma_1\nu_2$$

e:

$$\gamma_3 = C_3 - \mu_3$$

e sostituendo:

$$(67) \qquad \gamma_3 - \nu_3 = C_3 - \frac{1}{2.\,2}\gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_1+2) - \gamma_1(\gamma_2-\nu_2) .$$

Combinando fra loro quattro a quattro i γ_1 covarianti irreducibili del primo grado; i γ_2 covarianti irreducibili del secondo grado cogli $\frac{1}{2}\gamma_1(\gamma_1+1)$ covarianti composti del secondo grado; i γ_2 covarianti irreducibili del secondo grado a due a due; ed i γ_1 covarianti irreducibili del primo grado ai γ_3 covarianti irreducibili del terzo grado, si ha il seguente numero di covarianti composti del quarto grado:

$$\frac{1}{2.\,3.\,4}\gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_1+2)(\gamma_1+3)+\tfrac{1}{2}\gamma_2\gamma_1(\gamma_1+1)+\tfrac{1}{2}\gamma_2(\gamma_2+1)+\gamma_1\gamma_3 .$$

Fra questi si hanno delle relazioni lineari dipendenti dalle ν_2, ν_3 relazioni lineari sussistenti fra i covarianti composti di secondo e di terzo grado; evidentemente esse sono:

le $\frac{1}{2}\nu_2\gamma_1(\gamma_1+1)$

$$(68)\qquad X_1^2 A_2 = 0\,,\quad Y_1^2 A_2 = 0\,,\quad X_1 Y_1 A_2 = 0\ldots X_1^2 B_2 = 0\ldots.$$

le $\gamma_2\nu_2$:

$$X_2 A_2 = 0\,,\quad Y_2 A_2 = 0\ldots. X_2 B_2 = 0\ldots.$$

e le $\gamma_1\nu_3$:

$$X_1 A_3 = 0\,,\quad Y_1 A_3 = 0\ldots. X_1 B_3 = 0\ldots.$$

Notiamo che le $\frac{1}{2}\nu_2\gamma_1(\gamma_1+1)$ relazioni (68) non sono però tutte indipendenti; infatti se si indicano con :

$$A' = 0\,,\quad A'' = 0\,,\quad A''' = 0\ldots. B' = 0\,,\quad B'' = 0\ldots.$$

quelle equazioni; si ha facilmente che l'equazione identica :

$$A_2 B_2 - A_2 B_2 = 0$$

può scriversi :

$$h_1 B' + h_1 B'' + l_1 B''' + \ldots h_1 A' - h_2 A'' - l_2 A''' - \ldots. = 0$$

ed analogamente per altre combinazioni a due a due delle ν_2 relazioni $A_2 = 0$, $B_2 = 0\ldots$ per cui le relazioni (68) si ridurranno ad un numero :

$$\tfrac{1}{2}\nu_2\gamma_1(\gamma_1+1) - \tfrac{1}{2}\nu_2(\nu_2-1).$$

Quindi il numero delle relazioni lineari necessariamente sussistenti fra i covarianti composti del quarto grado, sarà :

$$\tfrac{1}{2}\nu_2\gamma_1(\gamma_1+1) - \tfrac{1}{2}\nu_2(\nu_2-1) + \gamma_2\nu_2 + \gamma_1\nu_3$$

ed indicando con μ_4 il numero degli indipendenti, e con ν_4 quello delle nuove relazioni lineari :

$$A_4 = p_1 X_1^4 + q_1 X_1^3 Y_1 + r_1 X_1^2 X_2 + s_1 X_2^2 + t_1 X_1 X_3 + \ldots. = 0$$
$$B_4 = p_2 X_1^4 + q_2 X_2^3 Y_1 + r_2 X_2^2 X_2 + s_2 X_2^2 + t_2 X_1 X_3 + \ldots. = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

si avranno le :

$$\frac{1}{2.\,3.\,4}\gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_1+2)(\gamma_1+3) + \tfrac{1}{2}\gamma_2\gamma_1(\gamma_1+1) + \tfrac{1}{2}\gamma_2(\gamma_2+1) + \gamma_1\gamma_3$$
$$= \mu_4 + \nu_4 + \tfrac{1}{2}\nu_2\gamma_1(\gamma_1+1) - \tfrac{1}{2}\nu_2(\nu_2-1) + \gamma_2\nu_2 + \gamma_1\nu_3$$
$$\gamma_4 = C_4 - \mu_4$$

o sostituendo :

$$(69)\qquad \gamma_4 - \nu_4 = C_4 - \frac{1}{2.\,3.\,4}\gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_1+2)(\gamma_1+3) - \tfrac{1}{2}\gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_2-\nu_2)$$
$$- \tfrac{1}{2}(\gamma_2-\nu_2)(\gamma_2-\nu_2+1) - \gamma_1(\gamma_3-\nu_3).$$

Combinando opportunamente i covarianti irreducibili dei gradi primo, secondo, terzo, quarto si ottiene il seguente numero di covarianti composti del quinto grado:

$$\frac{1}{2.3.4.5}\gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_1+2)(\gamma_1+3)(\gamma_1+4)+\frac{1}{2.\,3}\gamma_2\,\gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_1+2)$$
$$+\tfrac{1}{2}\gamma_1\,\gamma_2(\gamma_2+1)+\tfrac{1}{2}\gamma_3\,\gamma_1(\gamma_1+1)+\gamma_2\,\gamma_3+\gamma_1\,\gamma_4$$

fra i quali necessariamente devono sussistere alcune relazioni lineari conseguenze delle ν_2, ν_3, ν_4 superiori; cioè le $\frac{1}{2.\,3}\nu_2\,\gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_1+2)$:

$$(70)\qquad Y_1^3\,A_2=0\,,\quad X_1^3\,B_2=0\,\ldots\,X_1^2\,Y_1\,A_2=0\,,\,\ldots$$

le $\gamma_1\,\gamma_2\,\nu_2$:

$$(71)\qquad X_1\,X_2\,A_2=0\,,\quad X_1\,Y_2\,A_2=0\,\ldots\,X_1\,X_2\,B_2=0\,\ldots$$

le $\frac{1}{2}\nu_3\,\gamma_1(\gamma_1+1)$:

$$(72)\qquad X_1^2\,A_3=0\,,\quad Y_1^2\,A_3=0\,,\,\ldots\,X_1\,Y_1\,B_3=0\,\ldots$$

le $\gamma_2\,\nu_3+\gamma_3\,\nu_2$:

$$X_2\,A_3=0\,,\quad Y_2\,A_3=0\,\ldots\,X_2\,B_3=0\,\ldots$$
$$X_3\,A_2=0\,,\quad Y_3\,B_2=0\,\ldots\,X_3\,A_2=0\,\ldots$$

e le $\gamma_1\,\nu_4$:

$$X_1\,A_4=0\,,\quad Y_1\,A_4=0\,\ldots\,X_1\,B_4=0\,\ldots$$

Ma le relazioni (70) non sono tutte indipendenti, giacchè le equazioni identiche:

$$X_1(A_2\,B_2-A_2\,B_2)=0\,,\quad Y_1(A_2\,B_2-A_2\,B_2)=0\,\ldots$$

in numero $\frac{1}{2}\gamma_1\,\nu_2\,(\nu_2-1)$ conducono evidentemente a relazioni lineari fra i primi membri delle equazioni (70). Così le relazioni (71), (72) non sono tutte indipendenti giacchè combinando le ν_2 relazioni $A_2=0$, $B_2=0$ .... colle ν_3, $A_3=0, B_3=0$ .... si ottengono $\nu_2\,\nu_3$ relazioni lineari fra i primi membri delle (71), (72). Quindi il numero delle relazioni lineari necessariamente esistenti fra i covarianti composti del quinto grado è il seguente:

$$\frac{1}{2.\,3}\nu_2\,\gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_1+2)+\gamma_1\,\gamma_2\,\nu_2+\tfrac{1}{2}\nu_3\,\gamma_1(\gamma_1+1)+\gamma_2\,\nu_3+\gamma_3\,\nu_2+\gamma_1\,\nu_4$$
$$-\tfrac{1}{2}\gamma_1\,\nu_2(\nu_2-1)-\nu_2\,\nu_3$$

per cui indicando con μ_5 il numero dei covarianti indipendenti e con ν_5 quello delle nuove relazioni lineari si avrà:

*

$$\frac{1}{2.3.4.5}\gamma_1(\gamma_1+1)\ldots(\gamma_1+4)+\frac{1}{2.\,3}\gamma_2\gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_1+2)+\tfrac{1}{2}\gamma_1\gamma_2(\gamma_2+1)$$
$$-\tfrac{1}{2}\gamma_3\gamma_1(\gamma_1+1)+\gamma_2\gamma_3+\gamma_1\gamma_4=\mu_5+\nu_5+\frac{1}{2.\,3}\nu_2\gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_1+2)$$
$$+\tfrac{1}{2}\nu_3\gamma_1(\gamma_1+1)+\gamma_2\nu_3+\gamma_3\nu_2+\gamma_1\nu_4-\tfrac{1}{2}\gamma_1\nu_2(\nu_2-1)-\nu_2\nu_3$$

e:

$$\gamma_5=C_5-\mu_5;$$

ossia sostituendo si avrà:

$$(73)\qquad \gamma_5\nu_5=C_5-\frac{1}{2.3.4.5}\gamma_1(\gamma_1+1)\ldots(\gamma_1+4)-\frac{1}{2.\,3}\gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_1+2)(\gamma_2-\nu_2)$$
$$-\tfrac{1}{2}\gamma_1(\gamma_1+1)(\gamma_3-\nu_3)-\tfrac{1}{2}\gamma_1(\gamma_2-\nu_2)(\gamma_2-\nu_2+1)$$
$$-(\gamma_2-\nu_2)(\gamma_3-\nu_3)-\gamma_1(\gamma_4-\nu_4).$$

2.° Dalle equazioni (65), (66), (67), (69), (73) ponendo $\gamma_r-\nu_r=\alpha_r$ si deducono le seguenti:

$$C_1=\alpha_1,$$
$$C_2=\tfrac{1}{2}\alpha_1(\alpha_1+1)+\alpha_2,$$
$$C_3=\frac{1}{2.\,3}\alpha_1(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2 \text{ ec. . . .}$$

le quali si possono porre sotto la forma:

$$C_1=\alpha_1,$$
$$2C_2=C_1\alpha_1+\alpha_1+2\alpha_2,$$
$$3C_3=C_2\alpha_1+C_1(\alpha_1+2\alpha_2)+\alpha_1+3\alpha_3,$$
$$4C_4=C_3\alpha_1+C_2(\alpha_1+2\alpha_2)+C_1(\alpha_1+3\alpha_3)+\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_4,$$
$$5C_5=C_4\alpha_1+C_3(\alpha_1+2\alpha_2)+C_2(\alpha_1+3\alpha_3)+C_1(\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_4)+\alpha_1+5\alpha_5.$$

Ora osservando che posto:

$$s_m=-\left[\alpha_1+\alpha_2\,\mathcal{E}\left(\frac{m}{2}\right)+\alpha_3\,\mathcal{E}\left(\frac{m}{3}\right)+\ldots\ldots+\alpha_r\,\mathcal{E}\left(\frac{m}{r}\right)+\ldots\right]$$

si hanno le:

$$s_1=-\alpha_1 \qquad s_4=-(\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_4)$$
$$s_2=-(\alpha_1+2\alpha_2) \qquad s_5=-(\alpha_1+5\alpha_5)$$
$$s_3=-(\alpha_1+3\alpha_3) \qquad s_6=-(\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+6\alpha_6)\ \text{ec.}$$

le equazioni superiori si ridurranno alle:

$$C_1+s_1=0,\quad 2C_2+C_1s_1+s_2=0,\quad 3C_3+C_2s_1+C_1s_2+s_3=0\ \text{ec.}$$

Dal confronto di queste ultime equazioni colle (61), rammentando quanto si è dimostrato al §. 4.° Capo V.° si concepirà facilmente la sussistenza dell'equazione:

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha_1}(1-x^2)^{\alpha_2}(1-x^3)^{\alpha_3}\dots} = 1 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots$$

e ponendo per α_1, α_2 ... i loro valori, della:

$$(74) \qquad \frac{(1-x)^{\nu_1}(1-x^2)^{\nu_2}(1-x^3)^{\nu_3}\dots}{(1-x)^{\gamma_1}(1-x^2)^{\gamma_2}(1-x^3)^{\gamma_3}\dots} = 1 + C_1x + C_2x^2 + C_2x^3 + \dots$$

la quale stabilisce una singolare relazione (una delle più belle scoperte del Sig. Cayley), fra i numeri dei covarianti indipendenti, dei covarianti irreducibili, e delle relazioni lineari fra i covarianti composti.

3.° Il numero C_r essendo quello di tutti i covarianti indipendenti di grado r, per quanto si è dimostrato al Cap.° IV.° §.° 6.°, sarà eguale a $Q(\frac{1}{2}nr, r, n)$ allorquando si considerino i soli invarianti di grado r, a $P(\frac{1}{2}nr, r, n)$ quando essendo nr pari si considera il numero totale degli invarianti, e dei covarianti di grado r, ed a $P[\frac{1}{2}(nr-1), r, n]$ quando essendo nr dispari si considera il numero totale dei covarianti di grado r. Ora essendo (Cap.° IV.° §.° 5.°):

$$Q(\tfrac{1}{2}nr, r, n) = \text{coefficiente di } x^n \text{ in } \frac{U(x)}{V(x)}$$

ponendo questa frazione sotto la forma del primo membro della (74) si otterranno ad un tratto e il numero degli invarianti irreducibili, e quello delle relazioni lineari fra gli invarianti composti. Analogamente dicasi per le altre due espressioni

$$P(\tfrac{1}{2}nr, r, n), \qquad P[\tfrac{1}{2}(nr-1), r, n].$$

Considerando la Tabella A del Cap.° V.°, rammentando essere $Q(\frac{1}{2}nr, r, n)$ il numero degli invarianti indipendenti di grado r della forma di grado n, ed anche il numero degli invarianti indipendenti di grado n della forma di grado r, si avrà che per la forma quadratica il numero degli invarianti indipendenti di grado n è eguale al coefficiente di x^n in:

$$A(2) = \frac{1}{1-x^2},$$

e quindi per la (74) la forma quadratica ha un invariante irreducibile del secondo grado, cioè il discriminante. Così essendo:

$$A(3) = \frac{1}{1-x^4}$$

la forma cubica ha un invariante irreducibile del quarto grado (il discriminante).

Le espressioni A(4), A(5), A(6) dimostrano che la forma biquadratica ha due invarianti irreducibili l'uno di secondo, l'altro di terzo grado; che la forma di quinto grado ha quattro invarianti irreducibili dei gradi 4, 8, 12, 18 , legati fra loro da una equazione del 36.° grado; e che la forma del sesto grado ha cinqne invarianti dei gradi 2, 4, 6, 10, 15 legati da una equazione del 30.° grado.

Il numeratore di A(7) nel quale si ponga x in luogo di x^2, confrontato colla espressione :

$$1 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_{16} x^{16}$$

dà :

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -1, \quad C_4 = 2, \ C_5 = -1, \dots C_{16} = 1;$$

quindi dalle formole (61) Cap.° V.° si avranno le :

$$s_1 = 0, \ s_2 = 0, \ s_3 = 3, \ s_4 = -8, \ s_5 = 5, \ s_6 = -27, \ s_7 = -28,$$
$$s_8 = -24, \ s_9 = -78, \text{ ec.} \dots$$

per le quali :

$$s_m = \mathcal{E}\left(\frac{m}{3}\right) + \mathcal{E}\left(\frac{m}{5}\right) + \mathcal{E}\left(\frac{m}{10}\right) + 10\,\mathcal{E}\left(\frac{m}{12}\right) + 25\,\mathcal{E}\left(\frac{m}{13}\right) + 20\,\mathcal{E}\left(\frac{m}{14}\right)$$
$$+ 49\,\mathcal{E}\left(\frac{m}{15}\right) + 37\,\mathcal{E}\left(\frac{m}{16}\right) + 19\,\mathcal{E}\left(\frac{m}{17}\right) + 27\,\mathcal{E}\left(\frac{m}{18}\right) + \dots\dots$$
$$- 2\,\mathcal{E}\left(\frac{m}{4}\right) - 5\,\mathcal{E}\left(\frac{m}{6}\right) - 4\,\mathcal{E}\left(\frac{m}{7}\right) - 2\,\mathcal{E}\left(\frac{m}{8}\right) - 9\,\mathcal{E}\left(\frac{m}{9}\right) - \mathcal{E}\left(\frac{m}{11}\right)$$
$$- 107\,\mathcal{E}\left(\frac{m}{19}\right) - 130\,\mathcal{E}\left(\frac{m}{20}\right) \dots\dots$$

ed il numeratore di A(7) eguaglierà la frazione :

$$\frac{(1-x^6)(1-x^{10})(1-x^{20})(1-x^{24})^{10}(1-x^{26})^{25}(1-x^{28})^{20}\dots\dots}{(1-x^8)^2(1-x^{12})^5(1-x^{14})^4(1-x^{16})^2(1-x^{18})^9(1-x^{22})\dots\dots}$$

nella quale il numero dei fattori del numeratore e del denominatore è infinito . Si avrà in conseguenza :

$$A(7) = \frac{(1-x^{20})(1-x^{24})^{10}(1-x^{26})^{25}(1-x^{28})^{20}(1-x^{30})^{49}(1-x^{32})^{37}(1-x^{34})^{19}\dots}{(1-x^4)(1-x^8)^3(1-x^{12})^6(1-x^{14})^4(1-x^{16})^2(1-x^{18})^9(1-x^{22})(1-x^{38})^{107}\dots\dots}$$

cioè il numero degli invarianti irreducibili per la forma di settimo grado è infinito. Essi saranno uno del quarto, tre dell'ottavo, sei del dodicesimo ec.

4.° Abbiamo dimostrato al §.° 6.° del Cap.° precedente che pel caso di nr pari il numero totale dei covarianti e degli invarianti di grado r della forma dell'ennesimo

grado è $P(\frac{1}{2} nr, r, n)$; e nel caso di nr dispari il numero totale dei covarianti di grado è $P[\frac{1}{2}(nr-1), r, n)$. Ora supponendo n dispari, nr sarà pari o dispari, secondo che r sarà pari o dispari; quindi per una forma di grado dispari, il numero totale degli invarianti e dei covarianti irreducibili verrà dato dalla formola :

$$P(\tfrac{1}{2} nr, r, n) + P[\tfrac{1}{2}(nr-1), r, n).$$

Dalle tabelle N, P avremo che quel numero pel caso di n pari sarà dato dalla formola:

$$P(\tfrac{1}{2} nr, r, n) = \text{coefficiente di } x^r \text{ in } N(n)$$

e pel caso di n dispari dalla :

$$P(\tfrac{1}{2} nr, r, n) + P[\tfrac{1}{2}(nr-1), r, n) = \text{coefficiente di } x^r \text{ in } N(n) + P(n).$$

Dalla :

$$N(2) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$$

deduciamo che le forme quadratiche hanno due covarianti irreducibili l'uno di primo grado, l'altro di secondo grado; il primo è la forma stessa, il secondo il discriminante.

La :

$$N(3) + P(3) = \frac{1+x^4}{(1-x^2)^2(1-x^4)} + \frac{x}{(1-x^2)^3} = \frac{1-x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

dimostra che le forme cubiche hanno quattro covarianti irreducibili dei gradi primo, secondo, terzo e quarto legati fra loro da una equazione del sesto grado. Il covariante del quarto grado è il discriminante. Così dalla :

$$N(4) = \frac{1-x^6}{(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^2}$$

si ha che la forma del quarto grado ha cinque covarianti irreducibili legati da una equazione del sesto grado. Così per quanto si è dimostrato al §.° precedente la forma biquadratica ha tre covarianti irreducibili dei gradi 1.°, 2.°, 3.° e due invarianti irreducibili dei gradi 2.°, 3.°

Il numeratore della $N(5) + P(5)$ posto a confronto colla espressione :

$$1 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{16} x^{16}$$

dà luogo alle :

$$C_1 = 1,\ C_2 = 1,\ C_3 = 4,\ C_4 = 6,\ C_5 = 8 \ldots C_{16} = 1$$

per le quali :

$$s_m = 5\mathcal{E}\left(\frac{m}{6}\right) + 5\mathcal{E}\left(\frac{m}{7}\right) + 7\mathcal{E}\left(\frac{m}{8}\right) + \mathcal{E}\left(\frac{m}{9}\right) + 13\,\mathcal{E}\left(\frac{m}{13}\right) + 48\mathcal{E}\left(\frac{m}{14}\right) + \cdots$$
$$- 1 - 3\mathcal{E}\left(\frac{m}{3}\right) - 2\mathcal{E}\left(\frac{m}{4}\right) - 2\mathcal{E}\left(\frac{m}{5}\right) - 9\mathcal{E}\left(\frac{m}{10}\right) - 19\mathcal{E}\left(\frac{m}{11}\right)$$
$$- 14\,\mathcal{E}\left(\frac{m}{12}\right) - \cdots\cdots$$

Si avrà quindi:

$$N(5) + P(5) = \frac{(1-x^6)^4(1-x^7)^5(1-x^8)^6(1-x^9)(1-x^{13})^{13}(1-x^{14})^{48}\cdots\cdots}{(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3(1-x^4)^3(1-x^5)^2(1-x^{10})^9(1-x^{11})^{19}(1-x^{12})^{14}\cdots}$$

ed essendo infinito il numero dei fattori nel numeratore e nel denominatore di questa frazione, sarà infinito il numero dei covarianti irreducibili di una forma del quinto grado. Essi sono uno del primo grado, due del secondo, tre del terzo, tre del quarto (compreso l'invariante), due del quinto ec.

(Continua).



SOPRA UN PROBLEMA GENERALE DI GEOMETRIA.

NOTA

DEL SIG. D^r. LUIGI CREMONA.

1. Nel fascicolo di gennaio 1860 del periodico: *Nouvelles Annales de Mathématiques* del Sig. Terquem, a pag. 43 trovasi enunciato un problema, caso particolarissimo del seguente:

Data una retta OA, un punto O in essa ed un punto B fuori della medesima, una curva (nel piano OAB) tale che conducendo una sua tangente qualsivoglia, e per B la parallela a questa, i segmenti della OA intercetti fra queste rette e il punto O siano legati da una data relazione algebrica del grado n.

Siano OM, ON i due segmenti compresi il primo fra il punto O e una tangente qualunque della curva, il secondo fra O e la parallela alla tangente. Sia:

$$F(OM\,,\ ON)=0$$

la relazione data. Posto $OB=b$ ed assunte le rette OA, OB per assi delle coordinate rettilinee y, x avremo:

$$OM=y-x\frac{dy}{dx}\,,\qquad ON=-b\frac{dy}{dx},$$

ove x, y sono le coordinate del punto di contatto. Arriviamo così all'equazione alle derivate:

$$(1)\qquad F\left(y-x\frac{dy}{dx}\,,\quad -b\frac{dy}{dx}\right)=0$$

la primitiva singolare della quale sarà evidentemente l'equazione della curva domandata.

Ma questa curva può essere ottenuta anche senza ricorrere alle derivate. Infatti, siano u, v le coordinate tangenziali della retta tangente la curva, cioè siano $-\frac{1}{u}$, $-\frac{1}{v}$ i segmenti degli assi OB, OA compresi fra l'origine O e la tangente suddetta. Avremo:

$$OM=-\frac{1}{v}\,,\quad ON=\frac{bu}{v}$$

quindi:

$$(2)\qquad F\left(-\frac{1}{v}\,,\ \frac{bu}{v}\right)=0$$

sarà l' equazione in coordinate tangenziali della curva domandata. Resta a dedurne l'equazione in coordinate cartesiane. A tale uopo, osservo che l'equazione in coordinate tangenziali del punto di contatto della tangente $(u,\ v)$ è:

$$(3) \qquad ux + vy + 1 = 0$$

e che la richiesta equazione cartesiana della curva sarà la condizione, che il punto (x, y) appartenga alla curva. Rendo omogenea in u, v la (2) mediante la (3), onde avrò:

$$F\left(\frac{ux+vy}{v}, \frac{bu}{v}\right) = 0 .$$

Le radici di questa equazione sono i valori del rapporto u, v corrispondenti a tutte le tangenti della curva che passano pel punto (x, y): dunque l'equazione cartesiana della curva sarà la condizione che l'equazione precedente abbia due radici eguali, ossia avrà per primo membro il discriminante della funzione omogenea in u, v:

$$F\left(\frac{ux+vy}{v}, \frac{bu}{v}\right).$$

Sia $\Delta(x, y)$ questo discriminante: sarà:

$$\Delta(x, y) = 0$$

la primitiva singolare della (1), mentre la primitiva completa è data da una tangente qualunque della curva, cioè è la (3) ove i parametri u, v sono legati dalla condizione (2).

La curva domandata è dunque algebrica della classe n (e dell'ordine $n(n-1)$).

Siccome l'equazione (3) si può desumere dall'eliminazione di $\frac{dy}{dx}$ fra le due:

$$y - x\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{v}, \qquad -\frac{dy}{dx} = \frac{u}{v}$$

così è manifesto che il precedente processo geometrico d'integrazione coincide col notissimo di Lagrange.

2. L'analogo problema nello spazio è il seguente:

Data una retta OA, un punto O in essa, e due punti B, C fuori di essa, trovare una superficie che conducendo un suo piano tangente qualunque, e per B e C i piani ad esso paralleli, i segmenti di OA intercetti fra questi piani e il punto O abbiano fra loro una data relazione algebrica del grado n.

Siano OL, OM, ON i tre segmenti anzidetti, e sia:

$$F(OL, OM, ON) = 0$$

la relazione data. Assumo OA, CB, OC per assi delle coordinate rettilinee x, y, z; posto $OB = b$, $OC = c$, avremo:

$$OL = x - y\frac{dx}{dy} - z\frac{dx}{dz}, \qquad OM = -b\frac{dx}{dy}, \qquad ON = -c\frac{dx}{dz}$$

ove x, y, z sono le coordinate del punto di contatto del piano tangente che si considera. Avremo dunque l'equazione alle derivate parziali:

$$(1) \qquad F\left(x - y\frac{dx}{dy} - z\frac{dx}{dz},\ -b\frac{dx}{dy},\ -c\frac{dx}{dz}\right) = 0$$

la primitiva singolare della quale sarà l'equazione della superficie domandata.

Siano u, v, w le coordinate tangenziali del piano tangente la superficie, cioè siano $-\frac{1}{u}, -\frac{1}{v}, -\frac{w}{1}$ i segmenti degli assi compresi fra questo piano e l'origine. Avremo :

$$OL = -\frac{1}{u}, \qquad OM = \frac{bv}{u}, \qquad ON = \frac{cw}{u}$$

epperò :

$$(2) \qquad F\left(-\frac{1}{u},\ \frac{bv}{u},\ \frac{cw}{u}\right) = 0$$

sarà l'equazione in coordinate tangenziali della superficie domandata.

L'equazione in coordinate tangenziali del punto di contatto del piano (u, v, w) è

$$(3) \qquad ux + vy + wz + 1 = 0.$$

Per esprimere la condizione che il punto (x, y, z) appartenga alla superficie, rendo la (2) omogenea in u, v, w mediante la (3); si avrà :

$$F\left(\frac{ux + vy + wz}{u},\ \frac{bv}{u},\ \frac{cw}{u}\right) = 0 \cdot$$

Questa equazione rappresenta, insieme colla (3) la superficie conica inviluppo de'piani tangenti condotti alla superficie (2) dal punto (3). Se questo punto appartiene alla superficie (2), quel cono avrà un piano tangente doppio; epperò l'equazione in coordinate x, y, z della superficie domandata avrà per primo membro il discriminante della funzione omogenea in u, v, w :

$$F\left(\frac{ux + vy + wz}{u},\ \frac{bv}{u},\ \frac{cw}{u}\right).$$

Sia $\Delta(x, y, z)$ questo discriminante; sarà :

$$\Delta(x,\ y,\ z) = 0$$

la primitiva singolare della (1). La primitiva completa è evidentemente somministrata da un piano tangente qualsivoglia della superficie, cioè è la (3), ove i parametri arbitrari u, v, w siano legati dalla condizione (2).

La superficie domandata è dunque algebrica della classe n (e dell'ordine $n(n-1)$).

L'equazione (3) si ottiene eliminando $\frac{dx}{dy}, \frac{dx}{dz}$ fra le tre :

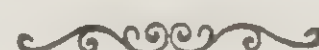
$$x - y\frac{dx}{dy} - z\frac{dx}{dz} = -\frac{1}{u}, \quad -\frac{dx}{dy} = \frac{v}{u}, \quad -\frac{dx}{dz} = \frac{w}{u},$$

epperò il metodo geometrico seguito nella precedente integrazione coincide coll' analitico usato ordinariamente.

Milano 1.° Giugno 1860.

SUR QUELQUES FONCTIONS SYMÉTRIQUES DES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

PAR M. MICHAEL ROBERTS.



Soient x_1, x_2, ... x_n les racines d'une équation du degré n, $f(x)=0$ désignons par $f'(x)$, $f''(x)$ les derivées successives de la fonction $f(x)$: dans ce Mémoire je me propose de discuter la fonction symétrique

$$\sum\frac{\varphi(x_1)f'(x_2)f'(x_3)\,......\,f'(x_n)}{f'(x_1)}$$

on $\varphi(x_1)$ est une fonction rationelle et entière de x_1 : et d'abord je vais démontrer qu'en connaissant la valeur du déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-2} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-2} & s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-4} \end{vmatrix}$$

par les coefficients de l'équation donnée (ou s_r est la somme des puissances r de ses racines), l'expression de la fonction symétrique dont il s'agit peut s'obtenir d'une manière simple. Dans ce qui suit nous ferons usage des coefficients binomiaux, et nous adopterons la notation fort commode de M. Cayley, en écrivant

$$f(x)=(a_0\,,a_1\,,a_2\,,\,.....\,a_n)(x,\,1)^n.$$

Posons maintenant

$$\varphi_m=a_0^{2n-4}\sum\frac{x_1^m f'(x_2)f'(x_3)\,.....\,f'(x_n)}{f'(x_1)},$$

et il est clair que φ_m est un fonction homogène du degrè $2n-4$ des quantités a_0, a_1, a_2, ... a_n. En vertu de notre définition, nous tirons facilement

$$\varphi_m=a_0^{2n-4}\sum x_1^m(x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2\,......\,(x_{n-1}-x_n)^2,$$

d'où

$$\left(\frac{d}{dx_1}+\frac{d}{dx_2}+\frac{d}{dx_3}+\,.....+\frac{d}{dx_n}\right)\varphi_m=m\varphi_{m-1}$$

Or M. Brioschi a fait voir qu'on a

$$\left(\frac{d}{dx_1}+\frac{d}{dx_2}+\frac{d}{dx_3}+\cdots\cdots+\frac{d}{dx_n}\right)\varphi$$
$$=-\left(a_0\frac{d}{da_1}+2a_1\frac{d}{da_2}+\ldots+na_{n-1}\frac{d}{da_n}\right)\varphi$$

en sorte qu'on trouve

$$\left(a_0\frac{d}{da_1}+2a_1\frac{d}{da_2}+\ldots\ldots+na_{n-1}\frac{d}{da_n}\right)\varphi_m=-m\varphi_{m-1}\,.$$

On voit donc que si la valeur de φ_m est connue par les coefficients a_0, a_1, a_2, ... a_n, les expressions pour φ_{m-1}, φ_{m-2}, ec. peuvent se trouver par des différentiations successives.

On peut remarquer aussi qu'en écrivant pour les a qui se trouvent dans chaque terme de φ_m les a à l'indice complémentaire (c'est-à-dire pour a_r substitutions a_{n-r}, ou passe à la valeur de φ_{2n-4-m} : mais on a, par un théorème connu

$$\varphi_0=a_0^{2n-4}\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2\ldots\ldots & s_{n-2}\\ s_1 & s_2 & s_3\ldots\ldots & s_{n-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ s_{n-2} & s_{n-1} & s_n\ldots\ldots & s_{2n-4}\end{vmatrix}$$

il résulte donc que si nous connaissons la valeur de ce déterminant par les coefficients a_0, a_1, a_2, ... a_n, on passe sur-le-champ à la valeur de φ_{2n-4}, et par conséquent, par le voie de différentiation, aux expressions pour φ_{2n-5}, φ_{2n-6}, ... φ_1.

Ici en peut invoquer avantageusement une notation déjà signalée par M. Combescure : elle consiste en désignant par δ_p l'operation

$$a_0\frac{d}{da_1}+2a_1\frac{d}{da_2}+\ldots+na_{n-1}\frac{d}{da_n}$$

appliquée p fois à une fonction des quantités a_0, a_1, a_2, ... a_n : ce qui donne

$$\delta a_r=ra_{r-1}$$

mais évidemment

$$\delta(uv)=u\delta v+v\delta u\,,$$

en sorte qu'on a

$$\delta a_r^s=rsa_r^{s-1}\,a_{r-1}\,:$$

dans cette sorte de différentiation, pour ainsi dire, on peut regarder les fonctions des différences des racines comme des constantes : et nous avons

$$\delta_p\,\varphi_m=(-1)^p m.\,\overline{m-1}.\,\overline{m-2}\ldots.\overline{m-p+1}\,\varphi_{m-p}\,.$$

M. Salmon, dans son excellent ouvrage « Lessons introductors to the Modern Higher Algebra » a ramené l'attention de géométres sur les fonctions φ_m : le célèbre analyste a fait observer qu'elles fournissent par leur quotients successifs les expressions les plus simples pour une racine double. Je les ai rencontré de mon côté, en cherchant de former l'expression pour le coefficient de l'avant-dernier terme de l'équation au carré des différences. Je vais maintenant faire application de ce qui précède aux équations du troisième, du quatrième et du cinquième degré.

Considérons maintenant l'équation

$$(a_0\,,\; a_1\,,\; a_2\,,\; a_3)(x, 1)^3 = 0$$

et nous avons

$$a_0^2 \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = 18(a_1^2 - a_0\, a_2) = \varphi_0$$

d'où nous tirons

$$\varphi_2 = 18(a_2^2 - a_1\, a_3)$$

et par conséquent,

$$\varphi_1 = -\tfrac{1}{2}\,\delta\varphi_2 = -9(a_1\, a_2 - a_0\, a_3).$$

Passons maintenant à l'équation biquadratique

$$(a_0\,,\; a_1\,,\; a_2\,,\; a_3\,,\; a_4)(x, 1)^4 = 0$$

et nous trouvons

$$\varphi_0 = a_0^4 \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = 192\,\{a_0^2 a_2 a_4 + 14 a_0 a_1 a_2 a_3 + 6 a_1^2 a_2^2 - a_0 a_1^2 a_4 - 8 a_1^3 a_3 - 3 a_0^2 a_3^2 - 9 a_0 a_2^3\}$$

d'où

$$\varphi_4 = 192\,\{\, a_0 a_2 a_4^2 + 14 a_1 a_2 a_3 a_4 + 6 a_2^2 a_3^2 - a_0 a_3^2\, a_4 - 8 a_1 a_3^3 - 3 a_1^2 a_4^2 - 9 a_2^3 a_4 \}$$

et

$$-\tfrac{1}{4}\,\delta\varphi_4 = \varphi_3 = -192\,\{\, 4 a_0 a_2 a_3 a_4 - 3 a_0 a_3^3 - a_0 a_1 a_4^2 + a_1^2 a_3 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3^2 - 3 a_1 a_2^2 a_4 \,\}$$

$$-\tfrac{1}{3}\,\delta\varphi_3 = \varphi_2 = 64\,\{\, - a_0^2 a_4^2 + 2 a_0 a_1 a_3 a_4 - 9 a_0 a_2 a_3^2 + 9 a_0 a_2^2 a_4 + 8 a_1^2 a_3^2 - 9 a_1^2 a_2 a_4 \,\}$$

$$-\tfrac{1}{2}\,\delta\varphi_2 = \varphi_1 = -192\,\{4 a_0 a_1 a_2 a_4 - 3 a_1^3 a_4 - a_0^2 a_3 a_4 + a_0 a_1 a_3^2 + 2 a_1^2 a_2 a_3 - 3 a_0 a_2^2 a_3 \,\}.$$

Nous allons maintenant soumettre ces expressions à un examen plus detaillé, et pour cela, nous remarquerons d'abord qu'en posant

$$\mathrm{S} = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2\,, \quad \mathrm{T} = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3$$

on a

$$\varphi_0 = 192\,\{\, 2(a_1^2 - a_0 a_2)\mathrm{S} + 3 a_0 \mathrm{T} \,\}.$$

(Voir les Nouvelles Annales de M. Terquem : cahier des Janvier 1860, page 25) d'où nous trouvons

$$\varphi_4 = 192 \left\{ 2(a_3^2 - a_2 a_4)\mathrm{S} + 3a_4\mathrm{T} \right\}$$

et, en se rappelant les règles pour l'emploi du symbole δ, on déduit facilement

$$\varphi_3 = -192 \left\{ (a_2 a_3 - a_1 a_4)\mathrm{S} + 3a_3\mathrm{T} \right\}$$

$$\varphi_2 = 64 \left\{ (3a_2^2 - 2a_1 a_3 + a_0 a_4)\mathrm{S} + 9a_2\mathrm{T} \right\}$$

$$\varphi_1 = -192 \left\{ (a_1 a_2 - a_0 a_3)\mathrm{S} + 3a_1\mathrm{T} \right\}$$

qui conduisent encore aux expressions fort élégantes

$$\varphi_4 = 192 \left\{ 3\mathrm{T}\frac{d\mathrm{S}}{da_0} - 2\mathrm{S}\frac{d\mathrm{T}}{da_0} \right\}$$

$$\varphi_3 = 192 \left\{ 3\mathrm{T}\frac{d\mathrm{S}}{da_1} - 2\mathrm{S}\frac{d\mathrm{T}}{da_1} \right\}$$

$$\varphi_2 = 128 \left\{ 3\mathrm{T}\frac{d\mathrm{S}}{da_2} - 2\mathrm{S}\frac{d\mathrm{T}}{da_2} \right\}$$

$$\varphi_1 = 192 \left\{ 3\mathrm{T}\frac{d\mathrm{S}}{da_3} - 2\mathrm{S}\frac{d\mathrm{T}}{da_3} \right\}$$

$$\varphi_0 = 192 \left\{ 3\mathrm{T}\frac{d\mathrm{S}}{da_4} - 2\mathrm{S}\frac{d\mathrm{T}}{da_4} \right\}$$

Considérons maintenant l'équation du cinquième degré

$$(a_0\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ a_4\,,\ a_5)(x,\,1)^5.$$

Pour ce cas nous trouvons

$$\varphi_0 = a_0^6 \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{vmatrix} =$$

$$2500 \left\{ \begin{array}{l} 80a_1^4 a_3 a_5 - 225a_1^4 a_4^2 - 60a_1^3 a_2^2 a_5 + 700a_1^3 a_2 a_3 a_4 + 200a_1^2 a_2^3 a_3^2 \\ -132a_0 a_1^2 a_2 a_3 a_6 - 300a_1^2 a_2^3 a_4 + 485a_0 a_1^2 a_2 a_4^2 - 400a_1^3 a_3^3 - 60a_0 a_1^2 a_3^2 a_4 \\ +720a_0 a_1 a_2 a_3^3 + 48a_0^2 a_1 a_3^2 a_5 - 1240a_0 a_1 a_2^2 a_3 a_4 - 132a_0^2 a_1 a_3 a_4^2 \\ +96a_0 a_1 a_2^3 a_5 - 320a_0 a_2^3 a_3^2 - 32a_0^2 a_2^2 a_3 a_5 + 480a_0 a_2^4 a_4 - 176a_0^2 a_2^2 a_4^2 \\ -14a_0 a_1^3 a_4 a_5 + 26a_0^2 a_1 a_2 a_4 a_5 + 468a_0^2 a_2 a_3^2 a_4 - 12a_0^3 a_3 a_4 a_5 \\ +16a_0^3 a_4^3 - a_0^2 a_1^2 a_5^2 + a_0^3 a_2 a_5^2 - 216a_0^2 a_3^4 \end{array} \right.$$

d'où

$$\varphi_6 =$$

$$2500\left\{\begin{aligned}
&80a_0 a_2 a_4^4 - 225a_1^2 a_4^4 - 60a_0 a_3^2 a_4^3 + 700a_1 a_2 a_3 a_4^3 + 200a_2^2 a_3^2 a_4^2\\
&-132a_0 a_2 a_3 a_4^2 a_5 - 300a_1 a_3^3 a_4^2 + 485a_1^2 a_3 a_4^2 a_5 - 400a_2^3 a_4^3\\
&-60a_1 a_2^2 a_4^2 a_5 + 720a_2^3 a_3 a_4 a_5 + 48a_0 a_2^2 a_4 a_5^2 - 1240a_1 a_2 a_3^2 a_4 a_5\\
&-132a_1^2 a_2 a_4 a_5^2 + 96a_0 a_3^3 a_4 a_5 - 320a_2^2 a_3^3 a_5 - 32a_0 a_2 a_3^2 a_5^2 + 480a_1 a_3^4 a_5\\
&-176a_1^2 a_3^2 a_5^2 - 14a_0 a_1 a_4^3 a_5 + 26a_0 a_1 a_3 a_4 a_5 a_5^2 + 468a_1 a_2^2 a_3 a_5^2\\
&-12a_0 a_1 a_2 a_5^3 + 16a_1^3 a_5^3 - a_0^2 a_4^2 a_5^2 + a_0^2 a_3 a_5^3 - 216a_2^4 a_5^2
\end{aligned}\right.$$

d'où l'on trouve

$$-\tfrac{1}{6}\delta\varphi^6 = \varphi_5 =$$

$$-1250\left\{\begin{aligned}
&-120a_0 a_1 a_4^4 + 320a_0 a_2 a_3 a_4^3 - 180a_0 a_3^3 a_4^2 + 266a_0 a_1 a_3 a_4^2 a_5 + 8a_0 a_2^2 a_4^2 a_5\\
&-584a_0 a_2 a_3^2 a_4 a_5 - 58a_0 a_1 a_2 a_4 a_5^2 + 288a_0 a_3^4 a_5 - 104a_0 a_1 a_3^2 a_5^2 - 8a_0^2 a_4^3 a_5\\
&+11a_0^2 a_3 a_4 a_5^2 + 156a_0 a_2^2 a_3 a_5^2 - 3a_0^2 a_2 a_5^3 + 8a_0 a_1^2 a_5^3 + 75a_1^2 a_3 a_4^3\\
&+100a_1 a_2 a_3^2 a_4^2 - 200a_1 a_2^2 a_4^3 - 35a_1^2 a_2 a_4^2 a_5 + 360a_1 a_2^2 a_3 a_4 a_5\\
&-120a_1^2 a_3^2 a_4 a_5 - 8a_1^3 a_4 a_5^2 - 160a_1 a_2 a_3^3 a_5 + 96a_1^2 a_2 a_3 a_5^2 - 108a_1 a_2^3 a_5^2
\end{aligned}\right.$$

$$-\tfrac{1}{5}\delta\varphi_5 = \varphi_4 =$$

$$2500\left\{\begin{aligned}
&-16a_0^2 a_4^4 + 28a_0^2 a_3 a_4^2 a_5 - 7a_0^2 a_2 a_4 a_5^2 - 6a_0^2 a_3^2 a_5^2 + a_0^2 a_1 a_5^3 + 20a_0 a_1 a_3 a_4^3\\
&-60a_0 a_2 a_3^2 a_4^2 + 80a_0 a_2^2 a_4^3 + 18a_0 a_1 a_2 a_4^2 a_5 - 152a_0 a_2^2 a_3 a_4 a_5\\
&-32a_0 a_1 a_3^2 a_4 a_5 - 2a_0 a_1^2 a_4 a_5^2 + 96a_0 a_2 a_3^3 a_5 - 4a_0 a_1 a_2 a_3 a_5^2\\
&+36a_0 a_2^3 a_5^2 + 50a_1^2 a_3^2 a_4^2 - 75a_1^2 a_2 a_4^3 - 15a_1^3 a_4^2 a_5 + 140a_1^2 a_2 a_3 a_4 a_5\\
&-80a_1^2 a_3^3 a_5 + 16a_1^3 a_3 a_5^2 - 36a_1^2 a_2^2 a_5^2
\end{aligned}\right.$$

$$-\tfrac{1}{4}\delta\varphi_4 = \varphi_3 =$$

$$-6250\left\{\begin{aligned}
&a_0^3 a_5^3 - 96(a_0^2 a_3 a_4^3 + a_0 a_1 a_3^3 a_5 + a_1^3 a_2 a_5^2 + a_0 a_2^3 a_4 a_5) + 32(a_0^2 a_2 a_4^2 a_5 + a_0 a_1^2 a_3 a_5^2)\\
&+132(a_0^2 a_3^2 a_4 a_5 + a_0 a_1 a_2^2 a_5^2) - 3a_0^2 a_1 a_4 a_5^2 - 68a_0^2 a_2 a_3 a_5^2 - 29a_0 a_1^2 a_4^2 a_5\\
&+60(a_0 a_1 a_3^2 a_4^2 + a_1^2 a_2^2 a_4 a_5) + 320(a_0 a_1 a_2 a_4^3 + a_1^3 a_3 a_4 a_5) - 416a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5\\
&-225a_1^3 a_4^3 - 160(a_0 a_2^2 a_3 a_4^2 + a_1^2 a_2 a_3^2 a_5) + 256a_0 a_2^2 a_3^2 a_5 + 100a_1^2 a_2 a_3 a_4^2
\end{aligned}\right.$$

Il est inutile d'écrire les valeurs de φ_2 et φ_1, parce qu'elles se déduisent de celles que je viens de donner pour φ_4 et φ_5 respectivement en substituant pour les a qui s'y trouvent les a à l'indice complémentaire. Je dois remarquer qu'ici se présente un

moyen de vérifier notre calcul : savoir, qu'en formant l'expression ponr $\partial\varphi_1$ on doit retomber sur φ_0 , ou bien sur la même fonction d'où nous sommes partis : ce qui, en effet, j'ai trouvé d'avoir lieu. Le calcul des déterminants par les coefficiens a_0 , a_1 , a_2 . . . . a_n s'abrége beaucoup en mettant de côté toutes les combinaisons de termes dont le degré surpasse $2n - 4$, qui, évidemment, se détruisent mutuellement.

Si l'on veut adopter la forme canonique de M. Sylvester pour le cinquième degré, savoir $ax^5 + by^5 + cz^5$ ou $x + y + z = 0$ nous trouvons les valeurs suivantes

$$\varphi_0 = 3500ac\,\{\,2ab^2c - 10abc^2 - 10a^2bc - 5a^2c^2 - b^2c^2 - a^2b^2\,\}$$

$$\varphi_1 = -1250ac\,\{\,2a^2bc - 22abc^2 - 5a^2c^2 + 3a^2b^2 + 2ab^2c - 5b^2c^2\,\}$$

$$\varphi_2 = 2500ac\,\{\,2a^2bc - 10abc^2 - 10ab^2c - 5b^2c^2 - a^2b^2 - a^2c^2\,\}$$

$$\varphi_3 = -625\,\{\,a^3b^3 + 3ab^3c^2 + 3a^3bc^2 - 3a^2b^3c - b^3c^3 - 3a^3b^2c - 62a^2b^2c^2 - 31ab^2c^3 - 31a^2bc^3 - a^3c^3\,\}$$

$$\varphi_4 = 2500bc\,\{\,2ab^2c - 10abc^2 - 10a^2bc - 5a^2c^2 - a^2b^2 - b^2c^2\,\}$$

$$\varphi_5 = -1250bc\,\{\,2ab^2c - 22abc^2 - 5b^2c^2 + 3a^2b^2 + 2a^2bc - 5a^2c^2\,\}$$

$$\varphi_6 = 2500bc\,\{\,2a^2bc - 10abc^2 - 10ab^2c - 5b^2c^2 - a^2c^2 - a^2b^2\,\}\,.$$

Si l'équation a une racine double x_1 on a $x_1^4 = \frac{\varphi_4}{\varphi_0} = \frac{b}{a}$ en sorte que $x_1 = \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$, ce qu'on peut faire voir directement sans difficulté.

J'ai trouve pour le coefficient (à un facteur près) de l'avant-dernier terme de l'équation au carré des différences l'expression

$$\sum \frac{(f''x_1)^2 f'(x_2) f'(x_3) \,\ldots\, f'(x_n)}{f'(x_1)}$$

qui pour le troisième degré s'écrit de la manière suivante

$$\varphi_2\,\partial_2\,a_1^2 + 2\varphi_1\,\partial a_1^2 + 2\varphi_0\,a_1^2\,,$$

pour le quatrième degré, elle devient

$$\varphi_2\,\partial_2(a_2^2 - a_0\,a_4) + 2\varphi_1\,\partial(a_2^2 - a_0\,a_4) + 2\varphi_0\,(a_2^2 - a_0\,a_4),$$

et pour le cinquième degré on a

$$\varphi_4\,\partial_4(a_3^2 - a_1\,a_5) + 4\varphi_3\,\partial_3(a_3^2 - a_1\,a_5) + 12\varphi_2\,\partial_2(a_3^2 - a_1\,a_5) + 24\varphi_1\,\partial(a_3^2 - a_1\,a_5) + 24\varphi_0(a_3^2 - a_1\,a_5)\,,$$

φ_0 , φ_1 , φ_2 ec. ayant les valeurs déjà données pour leur degrés respectifs. Le loi de ces expressions se manifeste très aisément.

Nous allons maintenant démontrer que la forme

$$(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{2n-4})(x, y)^{2n-4}$$

est un covariant de la forme

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)(x, y)^n.$$

L'équation $\delta\varphi_m = -m\varphi_{m-1}$ que je viens de donner nous fait voir que les quantités $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ ec. satisfont aux conditions aux quelles les coefficiens d'un covariant de la forme $(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n)(x, y)^n$ doivent être assujettis : et la somme des indices des a dont chaque terme de φ_r est composé est $(n-1)(n-2)+r$ en sort que le *poids* de la forme $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{2n-4})(x, y)^{2n-4}$ est égal à

$$(n-1)(n-2)+2n-4 = \tfrac{1}{2}(n+1)(2n-4):$$

qui est l'autre condition pour que la forme d'ont il s'agit soit un covariant de la forme primitive (Voir « Lessons introductory to the Modern Higher Algebra » page 70, 74, 75). Il faut donc conclure que tous les invariants de la forme

$$(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{2n-4})(x, y)^{2n-4}$$

sont aussi invariants de la forme

$$(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n)(x, y)^n.$$

Il est intéressant d'observer que l'invariant quadratique de la forme

$$(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{2n-4})(x, y)^{2n-4}$$

a toujours pour facteur le discriminant de la forme primitive

$$(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n)(x, y)^n.$$

En effet, si cette dernière a pour facteur $(\lambda x + \mu y)^2$, nous trouvons, après la propriété démontrée par M. Salmon (« Lessons introductory to the Modern Higher Algebra » page 48)

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_1} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\varphi_2}{\varphi_3} = \ldots = \frac{\varphi_{2n-5}}{\varphi_{2n-4}}.$$

Or l'invariant quadratique de la forme

$$(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{2n-4})(x, y)^{2n-4}$$

peut s'écrire de la manière suivante

$$\alpha_0(\varphi_0\varphi_{2n-4} - \varphi_1\varphi_{2n-5}) + \alpha_1(\varphi_1\varphi_{2n-5} - \varphi_2\varphi_{2n-6}) + \ldots \\ + \alpha_{n-3}(\varphi_{n-3}\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}^2)$$

en déterminant convenablement les quantités $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ ec. expression qui s'annule si l'équation donnée a une racine double. Par le cinquième degré la quantité

$$\varphi_0\varphi_6 - 6\varphi_1\varphi_5 + 15\varphi_2\varphi_4 - 10\varphi_3^2$$

est égale au discriminant de la forme

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)(x, y)^5$$

multiplié par son invariant du quatrième degré.

Le 29 Mai 1860.

RICERCHE GEOMETRICHE SULLE FUNZIONI ELLITTICHE.

NOTA

DEL PROF. BARNABA TORTOLINI.

1.° Prendiamo un'ellisse con l'origine al centro, e di equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

Se dal centro abbassiamo una perpendicolare sulla direzione della retta tangente ad un qualche punto dell'ellisse, è noto che il luogo geometrico è una curva del quart' ordine, e della quale in più circostanze ho avuto occasione di occuparmi delle differenti sue proprietà; così se X_1, Y_1 sieno le coordinate di un punto della nuova curva corrispondenti ad un punto x, y dell'ellisse si ottiene facilmente

$$x=\frac{a^2X_1}{X_1^2+Y_1^2}\,,\qquad y=\frac{b^2Y_1}{X_1^2+Y_1^2}\,.$$

Volendo verificare l'equazione dell'ellisse con la consueta sostituzione circolare

$$x=a\cos\varphi\,,\qquad y=b\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

si ha pure

$$\cos\varphi=\frac{aX_1}{X_1^2+Y_1^2}\,,\qquad \mathrm{sen}\,\varphi=\frac{bY_1}{X_1^2+Y_1^2}$$

e per l'equazione della curva si ha, o dall'uno, o dall'altro sistema

$$(X_1^2+Y_1^2)^2=a^2X_1^2+b^2Y_1^2.$$

Se introduciamo la sostituzione

$$X_1=r\cos u\,,\qquad Y_1=r\,\mathrm{sen}\,u$$

avremo l'equazione polare, con l'origine al centro, vale a dire

$$r^2=a^2\cos^2u+b^2\,\mathrm{sen}^2u$$

ove r è il raggio vettore condotto dal centro ad un punto della curva, ed u l'angolo, che lo stesso raggio forma con l'asse $2a$. La medesima sostituzione introdotta nei valori di $\cos\varphi$, $\mathrm{sen}\,\varphi$, porge

$$\cos\varphi=\frac{a\cos u}{r}\,,\qquad \mathrm{sen}\,\varphi=\frac{b\,\mathrm{sen}\,u}{r}\,.$$

La menzionata curva del quart' ordine luogo geometrico della projezione ortogonale

del centro dell'ellisse sulle sue tangenti venne già chiamata dal Sig. ***W. Roberts*** di Dublino *derivata prima positiva*: una deduzione somigliante di altre curve darebbe luogo alla *derivata seconda, terza,* ec. . . . *positiva.*

2.° Dal centro ora dell'ellisse conduciamo altrettanti semidiametri ai suoi differenti punti, e cerchiamo la curva luogo geometrico di tutte le perpendicolari elevate sull' estremità di questi semidiametri. La nuova curva è del sesto ordine, ed è cognita sotto il nome di curva di *Talbot*: fin dal 1846 nella *Raccolta scientifica di Roma* determinai per il primo l'equazione algebrica di questa curva, e lo stesso ripetei sotto un'altro punto di vista in una mia Memoria inserita nel tomo 6.° per l'anno 1855 de'miei *Annali di scienze matematiche e fisiche.* Se si chiamino X, Y le coordinate di un punto qualunque della nuova curva, corrispondenti ad un punto (x, y) dell'ellisse, e si ritenga sempre

$$x = a \cos\varphi, \qquad y = b \operatorname{sen}\varphi$$

otterremo, come dimostrai nell'articolo della citata *Raccolta scientifica* di Roma, vol. 2.° n.° 6.° 1846

$$\mathrm{X} = \frac{\cos\varphi}{a}\left(a^2 + (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2\varphi\right), \qquad \mathrm{Y} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{b}\left(b^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\varphi\right).$$

Questa curva, e le successive dedotte con la stessa legge da ciascuna delle antecedenti vennero chiamate già da lungo tempo dallo stesso Sig. ***W. Roberts,*** *derivata prima, seconda, terza,* ... *negativa.* Questi due modi di derivazione di curva hanno fra di loro un legame intimo, così è facile il vedere, per esempio, nella curva di *Talbot,* che il luogo geometrico della projezione ortogonale dal centro sulle sue tangenti riproduce l'ellisse, ossia, che l'ellisse è la prima derivata positiva dalla curva di *Talbot.*

3.° Negli ottenuti valori di X, Y introduciamoci l'angolo polare u della *prima derivata positiva,* ossia poniamo come dal n.° 1.°

$$\cos\varphi = \frac{a\cos u}{r}, \qquad \operatorname{sen}\varphi = \frac{b \operatorname{sen} u}{r}$$

avremo

$$\mathrm{X} = \frac{\cos u}{r}\left(\frac{a^2r^2 + b^2(a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2 u}{r^2}\right), \qquad \mathrm{Y} = \frac{\operatorname{sen} u}{r}\left(\frac{b^2r^2 - a^2(a^2 - b^2)\cos^2 u}{r^2}\right).$$

Sia ω l'angolo polare per la nuova curva, facciasi

$$\mathrm{X} = \mathrm{R}\cos\omega, \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{R}\operatorname{sen}\omega$$

e si divida Y per X, avremo

$$\operatorname{tang}\omega = \operatorname{tang} u\left(\frac{b^2r^2 - (a^2 - b^2)a^2\cos^2 u}{a^2r^2 + (a^2 - b^2)b^2\operatorname{sen}^2 u}\right)$$

ove si dovrà di più sostituire

$$r^2 = a^2\cos^2 u + b^2\mathrm{sen}^2 u$$

il che porge in fine

$$\tang\omega = \tang u\left(\frac{b^4 - (a^2 - b^2)^2\cos^2 u}{a^4 - (a^2 - b^2)^2\mathrm{sen}^2 u}\right).$$

Questa equazione somministra una relazione fra i due angoli polari delle due indicate curve corrispondenti ad uno stesso punto dell'ellisse. Si ricavi dal precedente valore, $\mathrm{sen}\,\omega$, il che per il quadrato dà

$$\mathrm{sen}^2\omega = \frac{\mathrm{sen}^2 u\,[b^4 - (a^2 - b^2)^2\cos^2 u\,]^2}{\cos^2 u\,[a^4 - (a^2 - b^2)^2\mathrm{sen}^2 u\,]^2 + \mathrm{sen}^2 u\,[b^4 - (a^2 - b^2)^2\cos^2 u\,]^2}\,.$$

Si sostituisca $\cos^2 u = 1 - \mathrm{sen}^2 u$, ed avremo dopo facili riduzioni

$$\mathrm{sen}^2\omega = \frac{\mathrm{sen}^2 u[2a^2b^2 - a^4 + (a^2 - b^2)^2\mathrm{sen}^2 u]^2}{a^8 - 2a^4(a^4 - b^4)\mathrm{sen}^2 u + (a^4 - b^4)^2\mathrm{sen}^4 u}$$

ove si vede chiaramente, che il secondo membro è un quadrato perfetto, per cui

$$\mathrm{sen}\,\omega = \frac{\mathrm{sen}\,u\,[a^2(2b^2 - a^2) + (a^2 - b^2)^2\mathrm{sen}^2 u]}{a^4 - (a^4 - b^4)\mathrm{sen}^2 u}.$$

Ora nelle funzioni ellittiche di prima specie una relazione somigliante fra questi due angoli, soddisfa nel teorema di *Jacobi* alla così detta trasformazione del terz'ordine; infatti alla pag. 25 del *Fundamenta nova* di *Jacobi*, si trova, che il valore di

$$\mathrm{sen}\,T' = \frac{(1 + 2\alpha)\,\mathrm{sen}\,T + \alpha^2\,\mathrm{sen}^3 T}{1 + \alpha(2 + \alpha)\mathrm{sen}^2 T}$$

soddisfa all'equazione differenziale

$$\frac{dT'}{\sqrt{(1+2\alpha)^3\cos^2 T' + (1-\alpha)^3(1+\alpha)\mathrm{sen}^2 T'}} = \frac{dT}{\sqrt{(1+2\alpha)\cos^2 T + (1+\alpha)^3(1-\alpha)\mathrm{sen}^2 T}}\,.$$

Qui pel confronto sarà primieramente $\omega = T'$, $u = T$, e dividendo il numeratore e denominatore di $\mathrm{sen}\,\omega$ per a^4, faremo inoltre

$$1 + 2\alpha = \frac{a^2(2b^2 - a^2)}{a^4} = \frac{2b^2 - a^2}{a^2}$$

d'onde

$$\alpha = -\frac{(a^2 - b^2)}{a^2},\ \alpha^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4},\ 2 + \alpha = \frac{a^2 + b^2}{a^2},\ \alpha(2 + \alpha) = -\frac{(a^4 - b^4)}{a^4}$$

quali soddisfano evidentemente al riportato valore di $\mathrm{sen}\,\omega$ per $\mathrm{sen}\,u$: di più si ha

$$1 + \alpha = \frac{b^2}{b^2},\ 1 - \alpha = \frac{2a^2 - b^2}{a^2},\ (1 + 2\alpha)^3 = \frac{(2b^2 - a^2)^3}{a^6}$$

d'onde l'equazione differenziale diviene

$$\frac{d\omega}{\sqrt{[a^2(2b^2-a^2)^3\cos^2\omega+b^2(2a^2-b^2)^3\operatorname{sen}^2\omega]}}=\frac{du}{\sqrt{[a^6(2b^2-a^2)\cos^2u+b^6(2a^2-b^2)\operatorname{sen}^2u]}}$$

ed ove tanto il primo, quanto il secondo membro viene riportato ad una funzione ellittica di prima specie. Le formole qui dimostrate risolveranno adunque la questione proposta *dans le nouvelles Annales de Mathématiques de M. Terquem* Mai 1860, pag. 185 (*Note sur les fonctions elliptiques par M. Strebor*). Trovo una sola differenza nell'equazione differenziale, vale a dire, che si adoprano in quella gli angoli complementari, ed allora si ha una perfetta coincidenza nei risultati. Molti sono gli articoli negli *Annali* del Sig. *Terquem*, ove si propongono a risolvere importanti questioni di Analisi, e di Geometria sotto il nome di *Strebor*. Fin dal 1848 nella Raccolta scientifica di Roma, fu pure da me risoluta una questione proposta con il nome *Strebor*. Io feci avvertire, che *Strebor* è l'anagramma di *Roberts*. È questo uno dei due illustri fratelli Geometri di Dublino (*William*). Di più in una lettera scrittami dal Sig. *W. Roberts* fin dal 1847 circa, esso m'indicò la proprietà che avevano queste due curve derivate dall'ellisse da soddisfare per gli angoli ω, u, alla trasformazione di terzo ordine per le funzioni ellittiche di prima specie.



SULLA RIDUZIONE DI UN INTEGRALE ALLE FUNZIONI ELLITTICHE.

NOTA

DEL PROF. BARNABA TORTOLINI.

1° Io prendo l'integrale della forma

$$V = \int du \sqrt{\left((A + B\cos 2u + C\cos^2 2u\right)}.$$

Esso come è noto riducesi alle funzioni ellittiche, e verrò brevemente a richiamare a memoria come possa eseguirsi una somigliante riduzione per farne quindi alcune applicazioni geometriche, tanto per la rettificazione di qualche curva piana, quanto per qualche curva a doppia curvatura.

2° Seguendo una sostituzione di già in uso presso i geometri sia m un'indeterminata, e θ un nuovo angolo, in guisa che sia

$$\tan u = m \tan \theta.$$

Avremo con gran facilità

$$\cos 2u = \frac{1 - m^2 + (1 + m^2)\cos 2\theta}{1 + m^2 + (1 - m^2)\cos 2\theta}, \qquad du = \frac{2m d\theta}{1 + m^2 + (1 - m^2)\cos 2\theta}.$$

Ciò posto per la sostituzione del nuovo valore di $\cos 2u$, il trinomio sotto il vincolo radicale prende la forma

$$A + B\cos 2u + C\cos^2 2u = \frac{A_1 + B_1\cos 2\theta + C_1\cos^2 2\theta}{[1 + m^2 + (1 - m^2)\cos 2\theta]^2}.$$

Avremo adunque per l'integrale trasformato

$$V = 2m\int \frac{d\theta\sqrt{(A_1 + B_1\cos 2\theta + C_1\cos^2 2\theta)}}{[1 + m^2 + (1 - m^2)\cos 2\theta]^2}$$

ove per A_1, B_1, C_1 abbiamo i valori

$$A_1 = A(1 + m^2) + B(1 + m^2)(1 - m^2) + C(1 - m^2)^2$$

$$B_1 = 2A(1 + m^2)(1 - m^2) + B[(1 + m^2)^2 + (1 - m^2)] + 2C(1 + m^2)(1 - m^2)$$

$$C_1 = A(1 - m^2) + B(1 + m^2)(1 - m^2) + C(1 + m^2)^2.$$

L'integrale con l'angolo u sarebbe spontaneamente riducibile alle funzioni ellittiche per il caso di $B = 0$, il nuovo integrale con l'angolo θ lo sarà dopo qualche altra sostituzione per $B_1 = 0$, il che verrà a farci conoscere l'indeterminata m, che soddisfi a questa condizione.

3.° Pongasi adunque $B_1 = 0$, si avrà

$$A(1 - m^4) + B(1 + m^4) + C(1 - m^4) = 0$$

d'onde

$$m^4 = \frac{A + B + C}{A + C - B} \qquad \text{e quindi} \qquad m = \frac{\sqrt[4]{(A + B + C)}}{\sqrt[4]{(A + C - B)}}.$$

Se la somma $A + B + C$ riesca positiva, converrà che si abbia $A + C > B$, onde il valore di m sia reale. Per i valori di A_1, C_1, si ha

$$A_1 = A + B + C + (A + C - B)m^4 + 2(A - C)m^2$$

$$C_1 = (A + B + C) + (A + C - B)m^4 - 2(A - C)m^2$$

quindi per la sostituzione del valore di m^2 ed m^4 divengono

$$A_1 = \frac{2(A + B + C)^{\frac{1}{2}}\left[\left((A + C)^2 - B^2\right)^{\frac{1}{2}} + A - C\right]}{(A + C - B)^{\frac{1}{2}}}$$

$$C_1 = \frac{2(A + B + C)^{\frac{1}{2}}\left[\left((A + C)^2 - B^2\right)^{\frac{1}{2}} - (A - C)\right]}{(A + C - B)^{\frac{1}{2}}}$$

ove si scorge chiaramente, che A_1 è dato da una somma, e C_1 da una differenza delle stesse quantità, ed avremo tanto per la somma quanto per la differenza

$$A_1 + C_1 = 4(A + B + C)$$

$$A_1 - C_1 = \frac{4(A - C)(A + B + C)^{\frac{1}{2}}}{(A + C - B)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ritenuto pertanto il significato di A_1, B_1 e di m, col fare $B_1 = 0$, l'integrale diverrà

$$V = 2m \int \frac{d\theta \sqrt{(A_1 + C_1 \cos^2 2\theta)}}{[1 + m^2 + (1 - m^2)\cos 2\theta]^2}.$$

Se qualcuna delle due quantità A_1, C_1 riuscisse negativa, si potrà in allora decomporre in due fattori reali la quantità sotto il vincolo radicale, il che porgerebbe una nuova riduzione che sarà bene d'indicare, e che ad essa si potrà sempre riportare, quando anche non sussistesse l'accennata condizione

4.° Poniamo per maggior semplicità $A_1 = \alpha^2$, $C_1 = -\beta^2$, e sostituiamo di più $\cos 2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$, si avrà primieramente

$$A_1 + C_1 \cos^2 2\theta = (\alpha + \beta - 2\beta \operatorname{sen}^2\theta)(\alpha - \beta + 2\beta \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$1 + m^2 + (1 - m^2)\cos 2\theta = 2[1 + (m^2 - 1)\operatorname{sen}^2\theta]$$

d'onde

$$V = \frac{m}{2}\int\frac{(\alpha+\beta-2\beta\,\mathrm{sen}^2\theta)(\alpha-\beta+2\beta\,\mathrm{sen}\,\theta)d\theta}{[1+(m^2-1)\mathrm{sen}^2\theta]^2\sqrt{(\alpha+\beta-2\beta\,\mathrm{sen}^2\theta)(\alpha-\beta+2\beta\,\mathrm{sen}^2\theta)}}.$$

Adopriamo ancora un'altro angolo ausiliare ψ ed una nuova indeterminata λ, in modo da essere

$$\mathrm{tang}\,\theta = \lambda\,\mathrm{tang}\,\psi$$

avremo

$$d\theta = \frac{\lambda d\psi}{1+(\lambda^2-1)\mathrm{sen}^2\psi}, \qquad \mathrm{sen}^2\theta = \frac{\lambda^2\mathrm{sen}^2\psi}{1+(\lambda^2-1)\mathrm{sen}^2\psi}$$

ed il nuovo integrale in ψ assumerà una forma somigliante alla precedente, vale a dire

$$V = \frac{\lambda m}{2}\int\frac{(M+N\,\mathrm{sen}^2\psi)(M_1+N_1\,\mathrm{sen}^2\psi)d\psi}{[1+(\lambda^2 m^2-1)\mathrm{sen}^2\psi]^2\sqrt{(M+N\,\mathrm{sen}^2\psi)(M_1+N_1\,\mathrm{sen}^2\psi)}}$$

ove per i coefficienti M, N, M_1, N_1 abbiamo

$$M = \alpha+\beta\,,\quad N = (\alpha-\beta)\lambda^2-(\alpha+\beta)$$

$$M_1 = \alpha-\beta\,,\quad N_1 = (\alpha+\beta)\lambda^2-(\alpha-\beta)$$

Per la determinazione di λ, facciamo $N_1 = 0$, il che dà

$$(\alpha+\beta)\lambda^2-(\alpha-\beta) = 0\,, \qquad \lambda^2 = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$$

ed il valore di λ sarà reale, se positivo sarà il secondo membro di λ^2. Con questa supposizione ricaviamo per l'altro coefficiente di $\mathrm{sen}^2\psi$

$$N = (\alpha-\beta)\lambda^2-(\alpha+\beta) = -\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

e per l'integrale avremo primieramente

$$V = \frac{\lambda m\sqrt{M_1}}{2}\int\frac{(M+N\,\mathrm{sen}^2\psi)d\psi}{[1+(\lambda^2m^2-1)\mathrm{sen}^2\psi]^2\sqrt{(M+N\,\mathrm{sen}^2\psi)}}.$$

Alla consueta forma delle funzioni ellittiche si ridurrà col fare intanto

$$n = \lambda^2m^2-1\,,\quad k^2 = -\frac{N}{M} = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}\,,\quad \Delta(\psi) = \sqrt{(1-k^2\mathrm{sen}^2\psi)}$$

ed osservando, che $M_1 = M\lambda^2$, si avrà

$$V = \frac{m\lambda^2}{a_2}\int\frac{(M+N\,\mathrm{sen}^2\psi)\,d\psi}{(1+n\,\mathrm{sen}^2\psi)^2\,\Delta(\psi)}.$$

Decomponiamo ora la frazione razionale, nel coefficiente di $d\psi$, e sia per un istante $z = \mathrm{sen}^2\psi$ avremo per lo spezzamento della frazione

$$\frac{M + Nz}{(1 + nz)^2} = \frac{L}{(1 + nz)^2} + \frac{H}{1 + nz} = \frac{L + H + nHz}{(1 + nz)^2}$$

d'onde

$$L + H = N, \qquad nH = N$$

ossia

$$H = \frac{N}{n}, \qquad L = M - \frac{N}{n} = \frac{nM - N}{n}.$$

Di qui si trae

$$V = \frac{m\lambda^2 N}{2n}\int\frac{d\psi}{(1 + n\,\mathrm{sen}^2\psi)\,\Delta(\psi)} + \frac{m\lambda^2(nM - N)}{2n}\int\frac{d\psi}{(1 + n\,\mathrm{sen}^2\psi)^2\Delta(\psi)}.$$

Il primo degli integrali rappresenta una funzione ellittica di terza specie. *Legendre* per riportare alla medesima forma tutte le altre, nelle quali il binomio $1 + n\,\mathrm{sen}^2\psi$ sia elevato ad una potenza r stabilisce la seguente formola. Sia

$$x = \mathrm{sen}\,\psi, \quad \sqrt{\alpha_1 + \beta_1 x^2 + \gamma_1 x^4} = R$$

e si ponga

$$\Pi^{(r)} = \int\frac{dx}{(1 + nx^2)^r R}$$

si avrà come a pag. 13 *Exercices de Calcul integr.*

$$\frac{xR}{(1 + nx^2)^{r-1}} = (2r - 2)\left(\alpha_1 - \frac{\beta_1}{n} + \frac{\gamma_1}{n^2}\right)\Pi^{(r)} - (2r-3)\left(\alpha_1 - \frac{2\beta_1}{n} + \frac{3\gamma}{n^2}\right)\Pi^{(r-1)}$$
$$+ (2r - 4)\left(-\frac{\beta_1}{n} + \frac{3\gamma_1}{n^2}\right)\Pi^{(r-2)} - (2r - 5)\frac{\gamma_1}{n^2}\Pi^{(r-3)}.$$

Nel nostro caso $r = 2$, per cui avremo la formola

$$\frac{xR}{1 + nx^2} = \frac{2(\alpha_1 n^2 - \beta_1 n + \gamma_1)}{n^2}\Pi^{(2)} - \frac{(\alpha_1 n^2 - 2\beta_1 n + 3\gamma_1)}{n^2}\Pi^{(1)} + \frac{\gamma_1}{n^2}\Pi^{(-1)}$$

ed ove

$$\Pi^{(-1)} = \int\frac{dx}{R} + n\int\frac{x^2 dx}{R}.$$

Di più per la sostituzione di $\mathrm{sen}\,\psi = x$, l'espressione $\frac{d\psi}{\Delta(\psi)}$, diviene

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}\cdot\sqrt{1 - k^2x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{[1 - (1 + k^2)x^2 + k^2x^4]}}$$

per cui dal confronto risulta

$$R = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = -(1 + k^2), \quad \gamma_1 = k^2.$$

Sostituiti questi valori nella formola che contiene $\Pi^{(2)}$, $\Pi^{(1)}$, $\Pi^{(-1)}$ col porre nuovamente $\operatorname{sen}\psi = x$, ed insieme

$$K = n^2 + 2n(1 + k^2) + 3k^2\,, \quad K_1 = n^2 + n(1 + k^2) + k^2$$

si avrà

$$\Pi^{(2)} = \frac{K}{2K_1}\Pi^{(1)} - \frac{\gamma_1}{2K_1}\Pi^{(-1)} + \frac{n^2 \operatorname{sen}\psi \cos\psi\, \Delta(\psi)}{2K_1(1 + n \operatorname{sen}^2\psi)}.$$

Ora $\Pi^{(1)}$ è la funzione ellittica di terza specie, che si suol scrivere anche con

$$\Pi(n, k, \psi) = \int \frac{d\psi}{(1 + n \operatorname{sen}^2\psi)\, \Delta(\psi)}$$

e $\Pi^{(-1)}$ dipende dalle funzioni ellittiche di prima, e seconda specie: infatti essa sarà

$$\Pi^{(-1)} = \int \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} + n \int \frac{\operatorname{sen}^2\psi\, d\psi}{\Delta(\psi)}.$$

Facendo uso secondo *Legendre* dei simboli

$$F(k, \psi) = \int \frac{d\psi}{\Delta(\psi)}, \qquad E(k, \psi) = \int d\psi\, \Delta(\psi).$$

ed osservando che

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2\psi\, d\psi}{(\Delta\psi)} = \frac{1}{k^2}\Big(F(k, \psi) - E(k, \psi)\Big)$$

si avrà ancora

$$\Pi^{(-1)} = \frac{(k^2 + n)}{k^2} F(n, \psi) - \frac{n}{k^2} E(k, \psi)$$

e perciò

$$\Pi^{(2)} = \frac{n^2 \operatorname{sen}\psi \cos\psi\, \Delta(\psi)}{2K_1(1 + n \operatorname{sen}^2\psi)} - \frac{\gamma_1(k^2 + n)}{2k^2 X_1} F(k, \psi)$$

$$+ \frac{\gamma_1 n}{2k^2 K_1} E(k, \psi) + \frac{K}{2K_1} \Pi(n, k, \psi)\,.$$

Ora mediante il simbolo $\Pi^{(r)}$ il valore di V si potrà scrivere sotto la forma

$$V = \frac{m\lambda^2 N}{2n} \Pi(n, k, \psi) + \frac{m\lambda^2(nM - N)}{2n} \Pi^{(2)}$$

e fatto per brevità

$$H = \frac{m\lambda^2}{2n}\left(\frac{(nM - N)K}{2K_1} + N\right), \qquad H_1 = \frac{mn\lambda^2(nM - N)K}{4K_1}$$

$$L = -\frac{m\lambda^2\gamma_1(nM - N)(k^2 + n)}{4nK_1k^2}, \quad L_1 = \frac{m\lambda^2\gamma_1(nM - N)}{2k^2K_1}$$

si avrà

$$V = \frac{H_1 \operatorname{sen} \psi \cos \psi \, \Delta(\psi)}{(1 + n \operatorname{sen}^2 \psi)} + H\,\Pi(n, k, \psi) + L.F(k, \psi) + L_1.E(k, \psi).$$

È dunque ridotto l'integrale in proposito alle tre funzioni ellittiche, ed ad una parte algebrica. Ai limiti $\psi = 0$, $\psi = \frac{1}{2}\pi$, si avrebbero solamente le tre funzioni complete, cioè

$$V = LF(k) + L_1E(k) + H\Pi(n, k).$$

Resta ora ad esaminarsi il valore del modulo, e del parametro in funzione dei coefficienti.

5° Incominciando dalla indeterminata λ, per essa abbiamo come dai stabiliti valori

$$\lambda^2 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta} = \frac{A_1 + C_1}{A_1 - C_1 + 2\sqrt{-A_1C_1}}.$$

Ma dai valori di A_1, C_1, e da $A_1 + C_1$, $A_1 - C_1$, ritrovati al parag. 3° deduciamo

$$A_1 C_1 = -\frac{4(A + B + C)(B^2 - 4AC)}{A + C - B}$$

d'onde viene

$$\lambda^2 = \frac{\sqrt{[(A + C)^2 - B^2]}}{A - C + \sqrt{(B^2 - 4AC)}}.$$

Di qui pel valore di m^2 ritrovato al parag. 3°

$$m^2\lambda^2 = \frac{A + B + C}{A - C + \sqrt{(B^2 - 4AC)}}.$$

Venendo alla determinazione del modulo k, per esso abbiamo

$$k^2 = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} = \frac{4\sqrt{-A_1 C_1}}{A_1 - C_1 + 2\sqrt{-A_1 C_1}} = 1 - \lambda^4$$

e per i noti valori di A_1, C_1 si ottiene

$$k^2 = \frac{2\sqrt{(B^2 - 4AC)}}{A - C + \sqrt{(B^2 - 4AC)}}.$$

Per il parametro n si ha

$$n = m^2\lambda^2 - 1 = \frac{2C + B - \sqrt{(B^2 - 4AC)}}{A - C + \sqrt{(B^2 - 4AC)}}$$

ove per i diversi casi particolari di A, B, C si potrà riconoscere se sia positivo, o negativo, e reale per la condizione $B^2 > 4AC$. Veniamo adesso ai valori di M, N,

K, K_1, H si ha per i primi come dal parag. 4°

$$M = \alpha + \beta\,, \quad N = -\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}\,, \quad \lambda^2 = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$$

ed onde intanto ottenere nell'espressione di V il coefficiente costante del termine algebrico, si avrà

$$mn\lambda^2 N = -m(m^2\lambda^2 - 1)\frac{4\alpha\beta(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)^2}$$

ovvero per la sostituzione di λ^2, verrà

$$mn\lambda^2 N = -\frac{4\alpha\beta(\alpha-\beta)\left[m^2(\alpha-\beta)-(\alpha+\beta)\right]m}{(\alpha+\beta)^3}.$$

Diviso il primo, e secondo membro per $4K_1$ si otterrà il ricercato coefficiente. Per K_1 si trovò

$$K_1 = n^2 + n(1+k^2) + k^2.$$

Rammentandoci sempre, che

$$n = \lambda^2 m^2 - 1 = \frac{m^2(\alpha-\beta)-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}\,, \qquad k^2 = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$$

avremo

$$n(1+k^2) = \frac{\left[(\alpha+\beta)^2+4\alpha\beta\right]\left[m^2(\alpha-\beta)-(\alpha+\beta)\right]}{(\alpha+\beta)^3}$$

quindi dalla sostituzione, e riduzione si trova

$$K_1 = \frac{m^2(\alpha-\beta)^2\left[m^2(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\right]}{(\alpha+\beta)^3} = \lambda^4 m^2(m^2-\lambda^2)\,.$$

Avremo adunque per il ricercato coefficiente

$$\frac{mn\lambda^2 N}{4K_1} = -\frac{\alpha\beta\left[m^2(\alpha-\beta)-(\alpha+\beta)\right]}{m(\alpha-\beta)\left[m^2(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\right]}\,,\ nM - N = (\alpha+\beta)\lambda^2(m^2-\lambda^2).$$

Infine essendo già calcolati i valori di λ^2, n per cui sostituendo

$$\alpha - \beta = \lambda^2(\alpha+\beta)\,, \quad n = \lambda^2 m^2 - 1$$

si ha nuovamente

$$H_1 = \frac{mn\lambda^2(Mn-N)}{4K_1} = \frac{\alpha\beta n(m^2-\lambda^2)(\alpha^2-\beta^2)}{4m(\alpha-\beta)(m^2-\lambda^2)\alpha\beta} = \frac{n(\alpha+\beta)}{4m}\,.$$

Di sopra si è posto $\alpha = \sqrt{A_1}$, $\beta = \sqrt{-C_1}$, ed osservando che i valori di A_1, C_1 ritrovati al parag. 3° si possono porre sotto la forma

$$A_1 = 2m^2\left[\left((A+C)^2 - B^2\right)^{\frac{1}{2}} + A - C\right]$$

$$C_1 = 2m^2\left[\left((A+C)^2 - B^2\right)^{\frac{1}{2}} - (A - C)\right].$$

Che se per brevità pongasi

$$P = \sqrt{[(A+C)^2 - B^2]}$$

verrà

$$A_1 = 2m^2(A - C + P)\,, \qquad -C_1 = 2m^2(A - C - P)$$

d'onde

$$\alpha - \beta = \sqrt{A_1} - \sqrt{-C_1} = m\sqrt{2}\left((A - C + P)^{\frac{1}{2}} - (A - C - P)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\alpha\beta = \sqrt{-A_1C_1} = 2m^2\left((A - C)^2 - P^2\right)^{\frac{1}{2}} = 2m^2\sqrt{B^2 - 4AC}.$$

I restanti valori di m, e λ sono già noti, e torna meglio rilasciare l'ottenuta espressione del coefficiente in questione. Facciamo una somigliante indagine del coefficiente H risguardante la trascendente Π. Per esso abbiamo come alla fine del parag. 4°

$$H = \frac{m\lambda^2}{2n}\left(\frac{K}{2K_1}(nM - N) + N\right).$$

Di più per K si trova pure, come per M, N

$$K = m^4\lambda^4 + 2\lambda^2m^2 - 2\lambda^6m^2 - \lambda^4\,, \qquad M = \alpha + \beta\,,$$

$$N = -\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta} = -(\alpha+\beta)(1 - \lambda^4)$$

e perciò

$$nM - N = (\alpha + \beta)\lambda^2(m^2 - \lambda^2)$$

e potendosi scrivere

$$H = \frac{K}{n^2}H_1 + \frac{m\lambda^2 N}{2n}$$

si ha infine

$$H = \frac{\lambda^4(\alpha+\beta)(m^4 - 1)}{4mn}.$$

Calcoliamo gli altri coefficienti L, L_1 delle due funzioni ellittiche di prima e seconda specie. Per la prima si ha

$$L = -\frac{m\lambda^2\gamma_1\,(nM - N)(k^2 + n)}{4nk^2K_1}.$$

E siccome

$$\gamma_1 = k^2 = 1 - \lambda^4 , \quad k^2 + n = \lambda^2(m^2 - \lambda^2)$$

$$nM - N = (\alpha + \beta)\lambda^2(m^2 - \lambda^2) , \quad K_1 = \lambda^4 m^2(m^2 - \lambda^2)$$

così otteniamo

$$L = -\frac{\lambda^2(\alpha + \beta)(m^2 - \lambda^2)}{4mn}.$$

Nella stessa guisa per l'altro coefficiente si ha

$$L_1 = \frac{m\lambda^2\gamma_1(nM - N)}{2k^2K_1} = \frac{\alpha + \beta}{2m}.$$

Sostituiti nel secondo membro di V, si ha

$$V = \frac{(\alpha+\beta)}{4m}\left[\frac{n \operatorname{sen}\psi \cos\psi\, \Delta(\psi)}{(1 + n \operatorname{sen}^2\psi)} + \frac{\lambda^4(m^4 - 1)}{n}\Pi(n, k, \psi) - \frac{\lambda^2(m^2-\lambda^2)}{n}F(k, \psi) + 2E(k, \psi)\right].$$

Questa è l'espressione finale dell'integrale , che ci eravamo proposti di ridurre , ed ove tanto il modulo, quanto il parametro unitamente alle altre quantità α, β, m dovranno tutte esser date in funzioni reali dei coefficienti A, B, C. Tralascio di fare ulteriore riduzione, mentre nelle applicazioni riuscirà più facile di calcolare separatamente tutte le quantità denotate per N, K, K_1 , m, λ, n, k. . . . Terminerò questo parag. con avvertire, che la doppia sostituzione degli angoli θ, e ψ, al primitivo u, porterebbe seco la sostituzione diretta

$$\operatorname{tang} u = m\lambda \operatorname{tang}\psi$$

e da quanto si è trovato al principio di questo parag.° la nuova indeterminata $\mu = m\gamma$ sarebbe data dall'equazione

$$\mu^2 = \frac{A + B + C}{A - C + \sqrt{(B^2 - 4AC)}}.$$

Di più si sarebbe potuta anche evitare questa doppia sostituzione, quando introducendo la primitiva indeterminata m si fosse di essa disposto a far svanire il coefficiente C_1 di $\cos^2 2\theta$: facendo infatti $C_1 = 0$ e sostituito μ in luogo di m, si avrà l'equazione

$$A + B + C - 2(A - C)\mu^2 + (A + C - B)\mu^4 = 0$$

d'onde dalla risoluzione

$$\mu^2 = \frac{A - C \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)}}{A + C - B}.$$

Prendiamo il segno —, si avrà identicamente

$$\mu^2 = \frac{[A - C - \sqrt{(B^2 - 4AC)}]\,[A - C + \sqrt{(B^2 - 4AC)}\,]}{(A + C - B)\,[A - C + \sqrt{(B^2 - 4AC)}\,]}$$

ossia

$$\mu^2 = \frac{(A + C)^2 - B^2}{(A + C - B)\,(A - C + \sqrt{B^2 - 4AC})}$$

ed infine

$$\mu^2 = \frac{A + C + B}{A - C + \sqrt{(B^2 - 4AC)}}$$

come già si era trovato di sopra.

6º Proponiamo per applicazione di rettificare la curva del sesto ordine

$$(x^2 + y^2)^3 = (ax^2 + by^2)^2.$$

Questa curva dotata di centro, chiusa in tutti i sensi, e simmetrica rapporto agli assi coordinati, deriva, come ho dimostrato in una mia precedente Memoria (*Annali di Mat.* Nº 5. 1859) dalla curva di quart'ordine

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$$

con la legge, che i raggi vettori della prima sono proporzionali ai quadrati dei raggi di questa: l'equazione polare dal centro si ha col fare

$$x = r\cos u, \qquad y = r \operatorname{sen} u$$

d'onde

$$r = a\cos^2 u + b\operatorname{sen}^2 u$$

quindi

$$dr = -(a - b)\operatorname{sen} 2u\, du\,, \quad r = \frac{a + b + (a - b)\cos 2u}{2}.$$

Ora se s sia l'arco corrispondente della curva, si ha generalmente

$$ds = \sqrt{(dr^2 + r^2 du^2)}.$$

Quindi fatta la sostituzione, e riduzione otteniamo un risultato della forma

$$ds = \frac{du}{2}\sqrt{(A + B\cos 2u + C\cos^2 2u)}$$

ove per brevità si è fatto

$$A = 4(a - b)^2 + (a + b)^2\,,\ B = 2(a + b)(a - b)\,,\ C = -3(a - b)^2.$$

Per l'arco indefinito abbiamo

$$s = \frac{1}{2}\int du\sqrt{(A + B\cos 2u + C\cos^2 2u)}.$$

I limiti dell'integrale $u = 0$, $u = \frac{\pi}{2}$, porgono per s il quadrante della curva: quest' integrale è della precisa forma di sopra considerata: la successiva sostituzione e dell' angolo θ, e dell' angolo ψ mantiene costantemente pel quadrante i medesimi limiti $\psi = 0$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, ed il perimetro totale della curva verrà rappresentato dalle tre funzioni ellittiche, delle quali ne giova indagare l'espressione del modulo, e del parametro

7.° Dai valori di A, B, C deduciamo

$$A + B + C = 4a^2, \qquad A + C - B = 4b^2$$

donde

$$m^2 = \frac{\sqrt{(A + B + C)}}{\sqrt{(A + C - B)}} = \frac{a}{b}, \quad \text{ed} \quad m = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$(A + C)^2 - B^2 = 16a^2b^2, \quad A - C = 4(2a^2 + 2b^2 - 3ab)$$

e quindi per i valori di A_1, C_1 stabiliti al parag. 3.°

$$A_1 = \frac{16a}{b}\left(ab + (a - b)^2\right) = \alpha^2, \quad C_1 = -\frac{16a}{b}(a - b)^2 = -\beta^2$$

abbiamo adunque reali i valori di α, e β cioè

$$\alpha = \frac{4\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\left(ab + (a - b)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \beta = \frac{4\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a - b).$$

Da queste sole quantità si possono già calcolare il modulo, ed il parametro; contuttociò dai medesimi valori di A, B, C, deduciamo

$$B^2 - 4AC = 64(a - b)^2(a^2 + b^2 - ab)$$

quindi pel quadrato del modulo

$$k^2 = \frac{2\sqrt{(B^2 - 4AC)}}{A - C + \sqrt{(B^2 - 4AC)}}$$

si troverà

$$k^2 = \frac{4(a - b)\sqrt{(a^2 + b^2 - ab)}}{2a^2 + 2b^2 - 3ab + 2(a - b)\sqrt{(a^2 + b^2 - ab)}}.$$

Il denominatore è precisamente il quadrato dei due fattori del numeratore, e si ha senza difficoltà

$$k^2 = \frac{4(a - b)\sqrt{(a^2 + b^2 - ab)}}{\left[a - b + \sqrt{(a^2 + b^2 - ab)}\,\right]^2}.$$

Allo stesso valore si sarebbe giunto anche più prontamente per mezzo dei valori di

α, β mentre

$$k^2 = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2}.$$

Dicesi complemento del modulo un'altra quantità k', per la quale sia $k^2 + k'^2 = 1$, d'onde per il precedente valore di k, si avrà

$$k'^2 = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)^2.$$

In questa curva a è il semiasse maggiore, e b il minore, per cui $a > b$, ed il modulo k, sarà sempre positivo e minore di 1, come lo richiede la funzione ellittica: per l'indeterminata λ in α, e β, abbiamo

$$\lambda^2 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}, \quad \text{ed} \quad \lambda^4 = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)^2 = k'^2.$$

Introducendosi i valori in a, e b, si trova

$$\lambda^2 = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 - ab)} - (a + b)}{\sqrt{(a^2 + b^2 - ab)} + a - b}.$$

Moltiplicando il numeratore, e denominatore per lo stesso denominatore, otteniamo

$$\lambda^2 = \frac{ab}{[a - b + \sqrt{(a^2 + b^2 - ab)}\,]^2}.$$

Di qui avendosi anche $m^2 = \frac{a}{b}$, avremo

$$\lambda^2 m^2 = \frac{a^2}{[a - b + \sqrt{(a^2 + b^2 - ab)}\,]^2}.$$

Ora $\lambda < 1$, ed $m > 1$, contuttociò $\lambda^2\mu^2$ sarà una frazione: infatti nel suo denominatore il radicale è evidentemente $> b$, per cui il denominatore medesimo sarà $> a^2$. Ciò posto per il parametro fu trovato

$$n = \lambda^2\mu^2 - 1$$

e sarà per conseguenza di forma negativa. In questo caso come ha dimostrato *Legendre* il parametro potrebbe essere collegato col modulo in due modi distinti. Sia ω un'angolo ausiliare, e vediamo se per valori reali di ω possa soddisfarsi all'equazione $n = - k^2 \operatorname{sen}^2\omega$; ossia

$$\operatorname{sen}^2\omega = \frac{1 - \lambda^2\mu^2}{k^2}.$$

Ora per le riduzioni trovate fra k', k, e λ si ha pure

$$k^2 = 1 - k'^2 = 1 - \lambda^4$$

d'onde

$$\text{sen}^2\omega = \frac{1 - \lambda^2 m^2}{1 - \lambda^4}$$

ed ove il numeratore è inferiore al denominatore infatti essendo $m^2 > \lambda^2$, sarà $m^2\lambda^2 > \lambda^4$, e mantenendosi sempre $m^2\lambda^2 < 1$, sarà anche $1 - \lambda^2 m^2 < 1 - \lambda^4$. È dunque soddisfatta la forma assegnata al parametro n : dal penultimo valore di λ^2 si dedurrà pel medesimo parametro

$$n = -\frac{(a-b)}{b}\left(\frac{a + b - \sqrt{(a^2 + b^2 - ab)}}{a - b + \sqrt{(a^2 + b^2 + b)}}\right).$$

Veniamo a calcolare i coefficienti H, H_1 .

8°. Per il secondo di questi coefficienti fu veduto al parag. 6°, che si ha

$$H_1 = \frac{2(\alpha + \beta)}{4m},$$

Ora se si ponga per brevità

$$G = \sqrt{(a^2 + b^2 - ab)}$$

e per i precedenti valori di α, β, λ, m, n

$$\alpha = 4mG\,, \quad \beta = 4m(a - b)\,, \quad \lambda^2 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}, \quad m^2 = \frac{a}{b}$$

$$n = -\frac{(a-b)}{b}\left(\frac{a + b - G}{G + a - b}\right), \qquad \lambda^4 = k'^2 = 1 - k^2$$

e si troverà

$$\lambda^2 - m^2 = -\frac{4m(a-b)(G + a + b)}{a + b}, \qquad H_1 = -\frac{(a-b)}{b}(a + b - G).$$

Per l'altro coefficiente H, si trovò

$$H = \frac{\lambda^4(\alpha + \beta)}{4mn}(m^4 - 1) \qquad \text{ossia} \qquad H = \frac{\lambda^4(a - b + G)(a^2 - b^2)}{b^2}.$$

Ora dal valore di k^2 si trae con facilità

$$\lambda^4 = 1 - k^2 = \frac{(a - b - G)^2}{(a - b + G)^2}$$

per cui

$$H = \frac{(a^2 - b^2)}{b^2}\;\frac{(a - b - G)^2(a - b + G)}{(a - b + G)^2}$$

e siccome in altre riduzioni di già accadute

$$(a - b - G)(a - b + G) = -ab$$

*

così si ha

$$H = \frac{a(a^2 - b^2)}{b} \frac{[G - (a - b)]}{(G + a - b)^2}$$

od anche

$$H = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{(G + a - b)^3}.$$

Calcoliamo gli altri coefficienti L_1, L: avremo pel primo

$$L_1 = \frac{\alpha + \beta}{2m} = 2(G + a - b)$$

e pel secondo

$$L = -\frac{\lambda^2(\alpha + \beta)(m^2 - \lambda^2)}{4mn}$$

e siccome

$$\frac{\lambda^2(\alpha + \beta)}{4m} = \frac{\alpha - \beta}{4m} = \frac{G - (a - b)}{G + a - b}$$

e per gli altri valori di n, m, λ si trova

$$L = \frac{4a(G + a + b)[G - (a - b)]}{(a + b)(a + b - G)}.$$

Qui pure

$$(a + b + G)(a + b - G) = 3ab$$

e perciò

$$L = \frac{12a^2b\,[G - (a - b)]}{(a + b)(a + b - G)^2}.$$

Riuniti questi coefficienti, ed osservando, che per l'arco s della nostra curva $2s = V$, si avrà

$$s = -\frac{(a - b)}{2b} \frac{(a + b - G)\,\mathrm{sen}\,\psi \cos\psi\, \Delta(\psi)}{(1 + n\,\mathrm{sen}^2\psi)} + \frac{(a^2 - b^2)}{2(G + a - b)^3}\,\Pi(n, k, \psi)$$

$$+ \frac{6a^2b\,[G - (a - b)]}{(a + b)(a + b - G)^2} F(k, \psi) + (G + a - b)\,E(k, \psi).$$

L'arco s indefinito vien computato sull'asse delle x a cominciar dall'estremità del semiasse a: i limiti $\psi = 0$, $\psi = \frac{\pi}{2}$ porgono il quadrante della curva, e l'intero perimetro S sarà espresso dalle sole tre funzioni ellittiche complete, vale a dire

$$S = \frac{24a^2b[G - (a - b)]}{(a + b)(a + b - G)^2} F(k) + 4(G + a - b)\,E(k) + \frac{2(a^2 - b^2)}{(G + a - b)^3}\,\Pi(n, k).$$

9.° Prendo per secondo esempio la curva a doppia curvatura proveniente dall'intersezione di un cilindro ellittico con un paraboloide di rivoluzione. Questa curva unitamente a molte altre di generico sferico sono state più volte tanto per la rettificazione, quanto per la quadratura prese ad esame dal Sig. *J. Booth* in una Memoria, che trovasi impressa nelle *Transazioni filosofiche* di Londra 1852, e 1854 sotto il titolo (*Reseaches on the geometrical proprietes of elliptic integrals*). Supponiamo adunque che l'asse delle z sia l'asse comune del cilindro, e del paraboloide. Nel cilindro ellittico sieno a, b i due semiassi dell'ellisse *base*, e sia $2h$ il parametro della parabola, avremo le due equazioni simultanee

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,,\qquad x^2+y^2=2hz.$$

Verifichiamo come fa lo stesso Sig. *Booth* per mezzo della nota sostituzione circolare l'equazione dell'ellisse, vale a dire

$$x=a\cos u\,,\qquad y=b\,\mathrm{sen}\,u$$

e quindi

$$2hz=a^2\cos^2 u+b^2\mathrm{sen}^2 u.$$

Dalla differenziazione si ha

$$dx=-a\,\mathrm{sen}\,u\,du\,,\ dy=b\cos u\,du\,,\ dz=-\frac{(a^2-b^2)\mathrm{sen}\,u\cos u\,du}{h}\cdot$$

Ora per il differenziale dell'arco s della nostra curva, si ha evidentemente

$$ds=\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$$

e quindi

$$ds=\frac{du}{h}\sqrt{b^2h^2+(a^2-b^2)(h^2+a^2-b^2)\mathrm{sen}^2u-(a^2-b^2)^2\mathrm{sen}^4u}\cdot$$

L'integrale sarà il valore dell'arco. Questa curva chiusa nella superficie del cilindro ellittico vien chiamata dal Sig. *Booth*, *Ellisse logaritmica*. Essa, ed altre dello stesso genere hanno una grand'analogia con le coniche sferiche. Il Sig. *Booth* fa osservare che il trinomio di quarto grado sotto il vincolo radicale è decomponibile in due fattori reali di secondo grado, il che a lui facilita la trasformazione per la riduzione ai trascendenti ellittici. Io lo farò come un'applicazione dell'integrale di sopra considerato. Sostituiamo i coseni dell' arco doppio invece di sen^2u, sen^4u, si avrà un' integrale della forma

$$s=\frac{h}{2}\int du\sqrt{(A+B\cos 2u+C\cos^2 2u)}$$

ed ove

$$A=2(a^2+b^2)h^2+(a^2-b^2)^2\,,\ B=-2(a^2-b^2)h^2\,,\ C=-(a^2-b^2)^2\,.$$

Con questi valori calcoleremo le indeterminate λ, m, e quindi tanto per il parametro, quanto per il modulo, si ha primieramente

$$A + B + C = 4b^2h^2, \quad A + C - B = 4a^2h^2$$

quindi

$$m^4 = \frac{4b^2h^2}{4a^2h^2} = \frac{b^2}{a^2}, \quad m^2 = \frac{b}{a}$$

$$(A + C)^2 - B^2 = 16a^2b^2h^4, \quad A - C = 2[(a^2 + b^2)h^2 + (a^2 - b^2)^2].$$

Di qui le quantità denotate per A_1, C_1 al parag. 3º divengono

$$C_1 = -\frac{4b(a-b)^2[h^2 + (a+b)^2]}{a}, \quad A_1 = \frac{4b(a+b)^2[h^2 + (a-b)^2]}{a}.$$

La quantità A_1 è positiva, e C_1 negativa, e fatto come sopra $A_1 = \alpha^2$, $C_1 = -\beta^2$, si trova

$$\alpha\beta = \sqrt{-A_1 C_1} = \frac{4a(a^2 - b^2)}{a}\sqrt{h^2 + (a-b)^2} \cdot \sqrt{h^2 + (a+b)^2}$$

quale potrà scriversi

$$\alpha\beta = \sqrt{-A_1 C_1} = \frac{4b(a^2 - b^2)}{a}\sqrt{(a^2 + b^2 + h^2)^2 - 4a^2b^2}.$$

Similmente si ottiene

$$B^2 - 4AC = 4(a^2 - b^2)^2 [h^4 + 2(a^2 + b^2)h^2 + (a^2 - b^2)^2]$$

ovvero

$$B^2 - 4AC = 4(a^2 - b^2)^2 [(a^2 + b^2 + h^2)^2 - 4a^2b^2]$$

d'onde

$$m^2\lambda^2 = \frac{2b^2h^2}{(a^2 + b^2)h^2 + (a^2 - b^2)^2 + (a^2 - b^2)\sqrt{(a^2 + b^2 + h^2)^2 - 4a^2b^2}}$$

e pel parametro $n = \lambda^2 m^2 - 1$

$$n = -\frac{[(a^2 - b^2)h^2 + (a^2 - b^2)^2 + (a^2 - b^2)\sqrt{(a^2 + b^2 + h^2)^2 - 4a^2b^2}]}{(a^2 + b^2)h^2 + (a^2 - b^2)^2 + (a^2 - b^2)\sqrt{(a^2 + b^2 + h^2)^2 - 4a^2b^2}}.$$

Nello stesso modo pel modulo k, si ricava

$$k^2 = \frac{2(a^2 - b^2)\sqrt{(a^2 + b^2 + h^2)^2 - 4a^2b^2}}{(a^2 + b^2)h^2 + (a^2 - b^2)^2 + (a^2 - b^2)\sqrt{(a^2 + b^2 + h^2)^2 - 4a^2b^2}}.$$

Questi valori sono d'accordo con quei dati dal Sig. *Booth*: esso sostituendo due sole quantità p, q alle tre costanti a, b, h li pone sotto una forma che merita di esser rimarcata.

10.° Pongasi primieramente

$$4p^2 = h^2 + (a + b)^2 \ , \quad 4q^2 = h^2 + (a - b)^2$$

il prodotto $4p^2 . 4q^2$ rappresenta egualmente la quantità sotto il vincolo radicale, per cui si ha

$$(a^2 + b^2 + h^2)^2 - 4a^2 b^2 = 16p^2 q^2$$

sommandole troviamo pure, e sottraendole

$$h^2 + a^2 + b^2 = 2(p^2 + q^2) \ , \quad ab = (p + q)(p - q),$$

Ciò posto il valore di k^2 diviene

$$k^2 = \frac{2(a^2 - b^2)4pq}{(a^2 + b^2)\left[2(p^2 + q^2) - (a^2 + b^2)\right] + (a^2 - b^2)^2 + (a^2 - b^2)4pq}$$

ovvero

$$k^2 = \frac{4(a^2 - b^2)pq}{(a^2 + b^2)(p^2 + q^2) - 2a^2b^2 + 2pq(a^2 - b^2)}$$

ed anche scrivendo per l'identità invece di

$$2a^2b^2 = a^2b^2 + a^2b^2 = a^2b^2 + (p + q)^2(p - q)^2$$

sarà anche

$$k^2 = \frac{4(a^2 - b^2)pq}{a^2(p + q)^2 + b^2(p - q)^2 - a^2b^2 - (p + q)^2(p - q)^2}$$

e che si ridurrà infine ad

$$k^2 = \frac{4(a + b)(a - b)pq}{(p + q + b)(p + q - b)(a + p - q)(a + q - p)},$$

Nella stessa guisa per il parametro n si ha col sostituire il valore di h^2

$$n = -\frac{\left[2(a^2 - b^2)(p^2 + q^2) - (a^4 - b^4) + (a^2 - b^2)^2 + (a^2 - b^2)4pq\right]}{2\left[(p + q)^2 - b^2\right](a + p - q)(a + q - p)}$$

ovvero

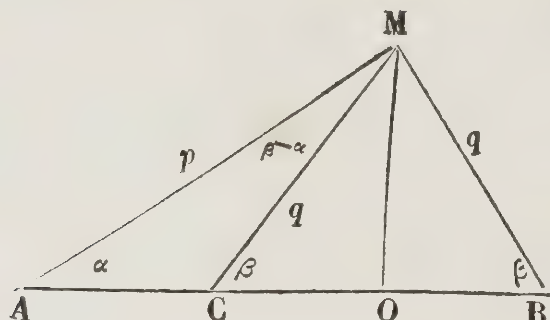
$$n = -\frac{2(a^2 - b^2)\left[(p + q)^2 - b^2\right]}{2\left[(p + q)^2 - b^2\right](a + p - q)(a + q - p)}$$

e finalmente

$$n = -\frac{(a + b)(a - b)}{(a + p - q)(a + q - p)} \ .$$

A queste due quantità il Sig. *Booth* ne aggiunge due altre, una delle quali dicesi il parametro conjugato, e l'altra il criterio di sfericità, che ne parleremo in altra Memoria: intanto seguendo le orme del Sig. *Booth* potremo scrivere sotto una forma

trigonometrica assai semplice i valori del modulo, e del parametro: aggiungeremo solamente la distanza del fuoco dell'ellisse dal centro, cioè $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ mentre il rapporto $\frac{c}{a}$ si suol chiamare l'eccentricità della curva, $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.



Pongasi AB $= a$, AC $= b$, e divisa BC in due parti eguali in O, si alzi la perpendicolare MO $= \frac{h}{2}$; quindi si congiungano i punti con M i punti A, C, B mediante le rette, che porremo

$$MA = p\,,\ MB = MC = q$$

l'angolo

$$CAM = \alpha\,,\ MBC = \beta = MCB\,,$$

e si avrà pure

$$AMB = AMC + CMB = \beta - \alpha + 180 - 2\beta = 180 + (\alpha + \beta).$$

Inoltre si ha

$$AO = AC + CO = b + \frac{1}{2}(a - b) = \frac{a + b}{2} \qquad BO = \frac{BC}{2} = \frac{a - b}{2},$$

e dai triangoli AOM, BOM si trae

$$a + b = 2p\cos\alpha, \qquad a - b = 2q\cos\beta.$$

Nella stessa guisa dai triangoli AMB, ACM, si deduce

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM.MB\cos AMB$$

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2AM.MC\cos AMC$$

ossia

$$a^2 = p^2 + q^2 + 2pq\cos(\alpha + \beta)\,, \qquad b^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos(\alpha - \beta).$$

Sostituendoci infine

$$\cos(\alpha + \beta) = 2\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) - 1 \quad \text{ed} \quad \cos(\alpha - \beta) = 2\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) - 1,$$

si avrà

$$a^2 = (p - q)^2 + 4pq\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\,, \qquad b^2 = (p + q)^2 - 4pq\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

per cui viene anche dalle precedenti

$$(a + b)(a - b) = 4pq\cos\alpha\cos\beta$$

d'onde tanto pel modulo, che pel parametro avremo

$$k^2 = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

$$n = -\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}.$$

Tali sono le forme di queste quantità, e ritrovate dal Sig. *Booth* : esse sono di una simplicità rimarcabile, ed in altra Memoria avrò occasione di parlare del parametro conjugato, e del criterio di sfericità : quest'ultimo rappresenta il coefficiente della funzione ellittica di terza specie, che s'incontra nella rettificazione dell'ellisse sferica: un' integrale di questa forma si riproduce assai frequentemente nei problemi di rettificazione, e di quadratura di curve provenienti dall'intersezione di due superficie di secondo ordine : per molti casi il Sig. *Booth* esamina queste intersezioni, e che si potrebbero chiamare *Sezioni Iperconiche.* Io mi propongo in breve di ritornare su questo argomento, ed in altri somiglianti sull'intersezione delle superficie curve, e riconosceremo nuove, e variate rappresentazioni geometriche delle funzioni ellittiche, ed iperellittiche secondo gli esempi, e le applicazioni che si sceglieranno.

Roma 3. Maggio 1860.



INTORNO ALLA MOLTIPLICAZIONE D'ALCUNE FORME QUADRATICHE.

NOTA

DEL SIG. PROF. ANGELO GENOCCHI.

Tra le forme che si riproducono per moltiplicazione sono le quadratiche

$$x^2 + ay^2\ ,\quad x^2 + ay^2 + bz^2 + abt^2$$

a due e quattro indeterminate: lo stesso deve dirsi della forma quadratica con otto indeterminate

$$x_1^2 + ax_2^2 + bx_3^2 + cx_4^2 + abx_5^2 + acx_6^2 + bcx_7^2 + abcx_8^2\ ,$$

e delle forme consimili che contengono 16, 32, ... e generalmente 2^n indeterminate. Riconosceremo dapprima questa proposizione in un caso particolare.

Il prodotto di n binomj

$$p_1^2 + a_1 q_1^2\ ,\ p_2^2 + a_2 q_2^2\ ,\ \ldots p_n^2 + a_n^2 q_n^2$$

sarà un polinomio che potremo rappresentare con

$$x_0^2 + \sum a_m x_m^2 + \sum\sum a_{m_1} a_{m_2} x_{m_1, m_2}^2 + \sum\sum\sum a_{m_1} a_{m_2} a_{m_3} x_{m_1, m_2, m_3}^2 + \ldots$$
$$+ a_1 a_2 \ldots a_n x_{1 \ldots n}^2 = \mathrm{X}:$$

esso conterrà 2^n termini, ognuno de'quali avrà per coefficiente una delle costanti 1, a_1, a_2, ... a_n ovvero il prodotto di due o più di esse, e avrà un fattore quadrato

$$x_0^2\ ,\ x_m^2\ ,\ x_{m_1, m_2}^2\ ,\ \ldots\ x_{1 \ldots n}^2$$

risultante dal moltiplicare n quadrati delle $2n$ indeterminate p_m, q_m. Similmente moltiplicando altri n binomj

$$r_1^2 + a_1 s_1^2\ ,\ r_2^2 + a_2 s_2^2\ ,\ \ldots r_n^2 + a_n s_n^2$$

si otterrà un polinomio

$$y_0^2 + \sum a_m y_m^2 + \sum\sum a_{m_1} a_{m_2} y_{m_1, m_2}^2 + \sum\sum\sum a_{m_1} a_{m_2} a_{m_3} y_{m_1, m_2, m_3}^2 + \ldots$$
$$+ a_1 a_2 \ldots a_n y_{1 \ldots n}^2 = \mathrm{Y};$$

e dal prodotto di n binomj

$$t_1^2 + a_1 u_1^2 , \; t_2^2 + a_2 u_2^2 , \; \ldots \; t_n^2 + a_n u_n^2$$

nascerà un polinomio

$$z_0^2 + \sum a_m z_m^2 + \sum\sum a_{m_1} a_{m_2} z^2_{m_1, m_2} + \sum\sum\sum a_{m_1} a_{m_2} a_{m_3} z^2_{m_1, m_2, m_3} + \ldots$$

$$+ a_1 a_2 \ldots a_n z^2_{1 \ldots n} = Z.$$

Ora è chiaro che supposto generalmente

$$t_m^2 + a_m u_m^2 = (p_m^2 + a_m q_m^2)(r_m^2 + a_m s_m^2),$$

si avrà $XY = Z$: onde se si prende generalmente

$$t_m = p_m r_m - a_m q_m s_m , \qquad u_m = p_m s_m + q_m r_m ,$$

la forma Z sarà il prodotto delle due simili X e Y, e le z si potranno esprimere razionalmente per mezzo delle a, delle x e delle y, poichè ogni z sarà il prodotto di n fra le indeterminate t_m, u_m e quindi sarà espressa da termini di cui ciascuno avrà per fattori n delle p_m, q_m e n delle r_m, s_m, e il prodotto dei primi n fattori sarà una delle x, il prodotto degli altri n fattori sarà una delle y.

Si avrà pure

$$x_0 = \pm p_1 p_2 \ldots p_n , \; x_m = \pm \frac{q_m}{p_m} x_0 , \; x_{m_1, m_2} = \pm \frac{q_{m_1} q_{m_2}}{p_{m_1} p_{m_2}} x_0 , \ldots .$$

$$x_{1 \ldots n} = \pm q_1 q_2 \ldots q_n ;$$

quindi

$$x_{m_1, m_2} = \pm \frac{1}{x_0} x_{m_1} x_{m_2} , \; x_{m_1, m_2, m_3} = \pm \frac{1}{x_0^2} x_{m_1} x_{m_2} x_{m_3} , \text{ ecc.}$$

Così dato x_0, e date le proporzioni $\frac{q_1}{p_1}, \frac{q_2}{p_2}, \ldots . \frac{q_n}{p_n}$, sono determinate tutte le quantità x_m, x_{m_1, m_2}, ecc.; si possono anche determinare ad arbitrio

$$x_0 , \; x_1 , \; x_2 , \; \ldots x_n ,$$

e date queste sono determinate le altre quantità

$$x_{m_1, m_2} , \; x_{m_1, m_2, m_3} , \text{ ecc.} ,$$

e ciascuna di esse in due modi, a cagione del doppio segno. Le stesse cose debbono parimente applicarsi alle y.

Pertanto l'equazione $XY = Z$ i cui membri sono polinomj di *secondo* grado rispetto a ciascuna delle accennate quantità x_{m_1, m_2}, y_{m_1, m_2}, ecc., è verificata per

certi valori particolari di queste indeterminate, cioè per *due* valori particolari di ogni indeterminata. Mercè d'un teorema noto conchiuderemo che per provare la generalità della stessa equazione basterà dimostrare che il quadrato di ciascuna indeterminata ha il medesimo coefficiente in ambi i membri.

Denotiamo con $\Pi a_h \cdot z^2_{\varpi(h)}$ un termine di Z: per ottenere $z_{\varpi(h)}$, si formerà il prodotto $\Pi t_k \cdot \Pi u_h$ intendendo che gl'indici k sono tutti diversi dagl'indici h, e usando sempre la lettera Π come simbolo di moltiplicazione; inoltre un termine qualsivoglia di Πt_k potrà esprimersi con

$$\pm \Pi(p_{k'} r_{k'}).\Pi(a_{k''} q_{k''} s_{k''}),$$

un termine qualsivoglia di Πu_h con $\Pi(p_{h'} s_{k'}).(\Pi q_{h''} r_{h''})$; quindi $z_{\varpi(h)}$ sarà composto di termini della forma

$$\pm \Pi a_{k''} \cdot \Pi(p_{h'} p_{k'} q_{k''} q_{k''}) .(\Pi r_{k'} r_{h''} s_{h'} s_{k''})$$

e al prodotto $\Pi(p_{h'} p_{k'} q_{k''} q_{k''})$ dovrà sostituirsi una delle x che indicheremo con $x_{\varpi(k'' k'')}$, al prodotto $\Pi(r_{k'} r_{h''} s_{h'} s_{k''})$ una delle y che indicheremo con $y_{\varpi(h' k'')}$, sicchè un tal termine diverrà

$$\pm \Pi a_{k''} \cdot x_{\varpi(h'' k'')} \, y_{\varpi(h' k'')} \,.$$

Adunque nel polinomio Z avremo il termine

$$\Pi a_h \cdot \Pi a^2_{k''} \cdot x^2_{\varpi(h'' k'')} \, y^2_{\varpi(h' k'')} \,.$$

D'altra parte un termine di X sarà

$$\Pi(a_{h''} a_{k''}) x^2_{\varpi(h'' k'')},$$

un termine di Y sarà

$$\Pi(a_{h'} a_{k''}) \, y^2_{\varpi(h' k'')},$$

il che darà nel prodotto XY il termine

$$\Pi a_{h'} \Pi a_{h''} \Pi a^2_{k''} \cdot x^2_{\varpi(h'' k'')} \, y^2_{\varpi(h' k'')} \,.$$

Laonde a causa di $\Pi a_h = \Pi a_{h'} \Pi a_{h''}$ si vede che il coefficiente di $x^2_{\varpi(h'' k'')} \, y^2_{\varpi(h' k'')}$ sarà $\Pi a_h \cdot \Pi a^2_{k''}$ tanto in XY quanto in Z, e che quindi debbe tenersi come generalmente vera l'eguaglianza XY = Z.

Riducendo tutte le costanti a_m all'unità, ne trarremo che il prodotto di due somme di 2^n quadrati è un'altra somma di 2^n quadrati. Questo teorema già dimostrato da Leonardo Pisano pel caso di due quadrati, e da Eulero pel caso di quattro, era

stato dato pel caso di otto quadrati dal prof. Brioschi (*), e riferito pure pel medesimo caso dal sig. Lebesgue ne'suoi *Exercices d'analyse numérique* (**), ottimo libro in cui sono con gran chiarezza e semplicità esposti i principj della teorica dei numeri, e che desideriamo ottenga come merita il pubblico favore, tanto da incoraggiare l'illustre Autore a fargli seguire i trattati delle parti superiori di questa scienza.

La forma quadratica X qui considerata si riduce al prodotto di più forme binarie quando sono adempiute le condizioni sopra dichiarate che stabiliscono certe proporzioni fra i valori numerici delle indeterminate. La proporzionalità dei valori numerici delle indeterminate basta eziandio a risolvere nel prodotto di due forme binarie quelle speciali forme quaternarie, di cui il signor Hermite mostrò molte notabili somiglianze con le forme binarie (***). Una di queste è

$$Auu_0 + Buv_0 + B_0u_0v + Cvv_0$$

dove A e C denotano quantità reali, mentre B e B_0, u e u_0, v e v_0 sono espressioni immaginarie conjugate a due a due: fatto

$$u = x + y\sqrt{-1}, \quad v = x_1 + y_1\sqrt{-1}$$

e però

$$u_0 = x - y\sqrt{-1}, \quad v_0 = x_1 - y_1\sqrt{-1},$$

e supposto

$$x = pp_1, \quad y = pq_1, \quad x_1 = p_1q, \quad y_1 = qq_1$$

il che dà la proporzione $\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}$, e inoltre

$$u = p(p_1 + q_1\sqrt{-1}), \quad v = q(p_1 + q_1\sqrt{-1}),$$
$$u_0 = p(p_1 - q_1\sqrt{-1}), \quad v_0 = q(p_1 - q_1\sqrt{-1}),$$

la forma proposta diverrà

$$(p_1^2 + q_1^2)(Ap^2 + 2bpq + Cq^2)$$

prodotto di due forme binarie in cui abbiamo rappresentata con $2b$ la quantità reale $B + B_0$. L'altra forma studiata del signor Hermite è

$$G'x_1^2 + 2Hx_1y_1 + Gy_1^2 + (GG' - H^2)(Gz^2 + 2Hzu + Gu^2),$$

e posto

$$x_1 = pp_1, \quad y_1 = pq_1, \quad z = p_1q, \quad u = qq_1, \quad GG' - H^2 = D,$$

diventa

$$(p^2 + Dq^2)(G'p_1^2 + 2Hpq_1 + Gq_1^2).$$

(*) Giornale di Crelle tom. 52 pag. 141.

(**) Parigi 1859, pag. 104.

(***) Giornale di Crelle, tom. 47, pag. 343; *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, tom. 40.

SOPRA LA TEORICA DEI NUMERI CONGRUI.

NOTA

DI F. WOEPCKE

È cosa ben cognita a tutti i matematici che il chiarissimo Principe Don Baldassarre Boncompagni pubblicò nel 1854 tre scritti preziosissimi di Leonardo Pisano, da lui scoperti in un codice della Biblioteca Ambrosiana di Milano, e fra essi il famoso *Libro de' quadrati* già creduto interamente perduto.

Grandissimo fu il servigio reso con questa scoperta dell'illustre Principe alla storia delle matematiche, e tale fu giudicato da parecchi valenti geometri i quali diedero in luce note e memorie per ischiarire l'importanza de' problemi e la sagacità delle risoluzioni contenute nel celebre trattato del Fibonacci.

Fra questi problemi uno de' bellissimi è quello dei numeri congrui, cioè la ricerca d'un numero quadrato s^2 tale, che essendo dato un certo numero k chiamato *congruo*, siano soddisfatte le due equazioni simultanee

$$s^2 + k = u^2 \qquad\qquad s^2 - k = v^2.$$

Furono trattate varie questioni relative ai numeri congrui con molta estensione dal Padre Cossali, e dipoi fu svolta la teorica degli stessi numeri con eleganza e chiarezza dal Sig^r^. Professore Angelo Genocchi negli *Annali di Scienze matematiche e fisiche* del Sig^r^. Professore Barnaba Tortolini (Tomo VI, pag. 273–320). Essendo giunto per un metodo diverso da quelli impiegati dal Signor Genocchi ad alcune delle conseguenze ottenute da questo dotto matematico, ed ad alcune altre, ho stimato giovevoli di esporre brevemente i risultati ai quali fui condotto.

Trovai in un manoscritto arabo del secolo decimo, conservato nella Biblioteca Imperiale di Parigi due trattati spettanti al problema de' numeri congrui. Ho qualche ragione di sperare che una traduzione francese dei medesimi trattati sarà tosto pubblicata in un altro luogo. Ambedue gli autori arabi si sono benissimo avveduti, dipendere la risoluzione delle due equazioni simultanee sopramentovate da quella dell' equazione

$$x^2 + y^2 = z^2$$

ovvero dalla teorica dei triangoli rettangoli numerici; imperocchè facendo

$$x = a^2 - b^2\,, \quad y = 2ab\,, \quad z = a^2 + b^2,$$

ove a e b sono primi tra sè, l'uno pari e l'altro impari, hanno

$$s = z\,,\quad k = 2xy\,,\quad u = x + y\,,\quad v = x - y\,,$$

e quindi l'espressione del numero congruo

$$k = 4ab(a^2 - b^2).$$

Inoltre, avendo dianzi definito i triangoli rettangoli derivati

$$\left(\frac{p}{q}\,x\right)^2 + \left(\frac{p}{q}\,y\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\,z\right)^2,$$

conoscono anche l'espressione generalissima del numero congruo

$$4\,\frac{p^2}{q^2}\,ab(a^2 - b^2).$$

L'uno dei due matematici arabi ha calcolato una tavola delle espressioni

$$x\,,\quad y\,,\quad z\,,\quad z^2,\quad 2xy\,,\quad z^2 + 2xy\,,\quad x + y\,,\quad z^2 - 2xy\,,\quad x - y$$

per i valori di

$$\left\{\begin{array}{l} a = 2,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 6,\ 5,\ 7,\ 6,\ 8,\ 7,\ 8,\ 9,\ 7,\ 8,\ 9, \\ b = 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 1,\ 4,\ 2,\ 5,\ 1,\ 4,\ 3,\ 2,\ 6,\ 5,\ 4, \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} 10,\ 10,\ 8,\ 11,\ 11,\ 12,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 13,\ 11,\ 12,\ 14,\ 14,\ 13 \\ 1,\ 3,\ 7,\ 2,\ 4,\ 1,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 2,\ 4,\ 8,\ 7,\ 1,\ 3,\ 6 \end{array}\right\}(*)$$

La colonna delle $2xy$ presenta trentatre numeri congrui, i quali saranno proposti qui appresso. Chiamando numeri congrui *primitivi* quelli liberi da ogni fattore quadrato, dei trentatre numeri congrui dell'autore arabo si deducono ventinove congrui primitivi, mentrecchè una tavola di ventinove numeri congrui calcolata dal Cossali non fornisce che dodici congrui primitivi, tutti contenuti fra quelli dell' autor arabo; ed un'altra tavola di cinquantadue numeri congrui che si trova nella *Summa de Arithmetica* di Fra Luca Pacioli, dà soltanto quattordici congrui primitivi, compresi anch'essi fra i ventinove che porge la tavola araba.

Ottenne l'autore arabo cotal vantaggio escludendo dal suo calcolo i valori di a e b non primi tra se. Tuttavia è lungi che abbia tratto dai triangoli rettangoli numerici registrati nella sua tavola, tutti i numeri congrui che avrebbe potuto dedurne. Ciò risulterà con evidenza dalle considerazioni seguenti.

Dividendo pello stesso quadrato q^2 le due equazioni

$$s^2 + k = u^2 \qquad\qquad s^2 - k = v^2$$

si hanno due nuove equazioni di forma simile alle precedenti, donde segue che di-

(*) La serie di questi valori è disposta secondo l'ordine di grandezza delle ipotenuse z risultanti da essi.

videndo un numero congruo per un suo fattore quadrato, si ottiene di nuovo un numero congruo. È stato detto che i numeri congrui calcolati dall'autor arabo sono della forma $4ab(a^2-b^2)$; si può dunque scartare il fattore 4. Le due equazioni fondamentali del problema divengono

$$\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 \pm ab(a^2-b^2) = \left(\frac{a^2 \pm 2ab - b^2}{2}\right),$$

e la forma del numero congruo sarà

$$\text{I)} \quad ab(a^2-b^2).$$

Ora abbiam veduto che nella tavola del matematico arabo si trovano tre colonne di valori x, y, z soddisfacenti all'equazione

$$x^2+y^2=z^2$$

ove

$$x=(n+\alpha+1)^2-(n-\alpha)^2,\ y=2(n+\alpha+1)(n-\alpha),\ z=(n+\alpha+1)^2+(n-\alpha)^2$$

prendendo $n=0, 1, 2, 3 \ldots$, $\alpha=0, 1, 2 \ldots (n-1)$ ed escludendo i valori di $n+\alpha+1$ e $n-\alpha$ non primi tra se.

Dunque nell'espressione I. ponendo $a=z$, $b=x$, il fattore a^2-b^2 si cambia nel quadrato y^2, scartando il quale si avrà il numero congruo

$$1) \qquad zx=(n+a+1)^4-(n-\alpha)^4.$$

Ma possiamo anche render quadrato il fattore a^2-b^2 facendo $a=z$, $b=y$, di modo che $a^2-b^2=x^2$, donde risulta il numero congruo

$$2) \qquad zy=2(n+\alpha+1)(n-\alpha)\{(n+\alpha+1)^2+(n-\alpha)^2\}.$$

Le equazioni del problema corrispondenti alla forma I. del numero congruo sono

$$\left(\frac{z^2+x^2}{2y}\right)^2 \pm zx = \left(\frac{y^2 \pm 2zx}{2y}\right)^2$$

ovvero, ponendo di nuovo in vece di x, y, z i loro valori a^2-b^2, $2ab$, a^2+b^2,

$$\left(\frac{a^4+b^4}{2ab}\right)^2 \pm (a^4-b^4) = \left(\frac{a^4 \pm 2a^2b^2-b^4}{2ab}\right)^2,$$

e la forma del unmero congruo sarà

$$\text{II)} \qquad (a^2+b^2)(a^2-b^2).$$

In questa espressione facendo $a=x$, $b=y$ rendiamo quadrato il fattore a^2+b^2 e si avrà il numero congruo

$$3) \quad \pm(x^2-y^2)=\pm\{(n+\alpha+1)^4+(n-\alpha)^4-6(n+\alpha+1)^2(n-\alpha)^2\}.$$

Facendo $a=z$, $b=x$, sarà quadrato il fattore a^2-b^2, e si ottiene il numero congruo

$$4) \qquad z^2+x^2=2(n+\alpha+1)^4+2(n-\alpha)^4.$$

Ma sarà ancora quadrato il fattore a^2-b^2 facendo $a=z$, $b=y$, di modo che si avrà il numero congruo

$$5) \qquad z^2+x^2=(n+\alpha+1)^4+(n-\alpha)^4+6(n+\alpha+1)^2(n-\alpha)^2.$$

Esaminiamo adesso le equazioni del problema corrispondenti alla forma 2. del numero congruo, cioè

$$\left(\frac{z^2+y^2}{2x}\right)^2 \pm zy = \left(\frac{x^2 \pm 2zy}{2x}\right)^2$$

ovvero, ponendo in luogo di x, y, z i loro valori a^2-b^2, $2ab$, a^2+b^2,

$$\left[\frac{a^4+b^4+6a^2b^2}{2(a^2-b^2)}\right]^2 \pm 2ab(a^2+b^2) = \left[\frac{(a \pm b)^4-8a^2b^2}{2(a^2-b^2)}\right]^2$$

e la forma del numero congruo sarà

$$\text{III)} \qquad (a^2+b^2)2ab.$$

In questa espressione facendo $a=x$, $b=y$ potremmo render quadrato il fattore a^2+b^2; ma sarebbe il numero congruo risultante da questa sostituzione $2xy$, cioè a dire quello già trovato e calcolato dall'autore arabo. Potremmo ancora render eguale al quadrato $4z^2$ il fattore $2(a^2+b^2)$ facendo $a=x+y$, $b=x-y$; ma riavremmo il numero congruo $\pm(x^2-y^2)$ già ricavato di sopra dalla forma II. Similmente facendo $a=\frac{z+x}{2}$, $b=\frac{z-x}{2}$ e rendendo perciò il fattore ab eguale al quadrato $\frac{1}{4}y^2$, si ritrova il numero congruo z^2+x^2.

Finalmente poniamo $a=\frac{z+x}{2}$, $b=z-x$; avremo $2ab=y^2$, e si ottiene il numero congruo

$$6) \qquad \left(\frac{z+x}{2}\right)^2+(z-x)^2=(n+\alpha+1)^4+4(n-\alpha)^4.$$

Se, come è stato fatto di sopra, si suppone $n+\alpha+1>n-\alpha$, bisogna distinguere ancora il caso di $a=z+x$, $b=\frac{z-x}{2}$, il quale ci dà il numero congruo

$$7) \qquad (z+x)^2+\left(\frac{z-x}{2}\right)^2=4(n+\alpha+1)^4+(n-\alpha)^4.$$

Esaminiamo pure le equazioni del problema corrispondenti alla forma 3., le quali sono

$$\left(\frac{x^4+y^4}{2xyz}\right)^2 \pm (x^2-y^2) = \left[\frac{(x^2 \pm y^2)^2 - 2y^4}{2xyz}\right]^2,$$

ovvero ponendo in vece di x, y, z i loro valori a^2-b^2, $2ab$, a^2+b^2,

$$\left[\frac{(a^2-b^2)^4+16a^4b^4}{4ab(a^4-b^4)}\right]^2 \pm \{(a^2-b^2)^2-4a^2b^2\} = \left[\frac{(a^2+b^2)^4-8a^2b^2\{(a^2+b^2)^2 \mp (a^2-b^2)^2\}}{4ab(a^4-b^4)}\right]^2$$

e la forma del numero congruo sarà

$$\text{IV)} \qquad \{(a+b)^2-2b^2\}\ \{(a-b)^2-2b^2\}.$$

Essendo indifferente il segno del numero congruo si otterranno ancora numeri congrui se l'uno o l'altro dei fattori dell' espressione IV. può esser reso quadrato negativo. Facendo $a=x+y-z$, $b=z$, si avrà $(a+b)^2-2b^2=-(x-y)^2$, e sarà il numero congruo

$$8)\quad 2z^2-(x+y-2z)^2 = 2\left[(n+\alpha+1)^2+(n-\alpha)^2\right]^2 - \left[(\overline{n+\alpha+1}-\overline{n-\alpha})^2+2(n-\alpha)^2\right]^2;$$

facendo $a=x+y+z$, $b=z$, si avrà $(a-b)^2-2b^2=-(x-y)^2$, e sarà il numero congruo

$$9)\quad (x+y+2z)^2-2z^2 = \left[(\overline{n+\alpha+1}+\overline{n-\alpha})^2+2(n+\alpha+1)^2\right]^2 - 2\left[(n+\alpha+1)^2+(n-\alpha)^2\right]^2.$$

La forma 3. dalla quale deducemmo le forme 8. e 9., mostra inoltre immediatamente che ogniqualvolta $x+y$ è numero quadrato, $x-y$ è numero congruo, e *vice versa*. La tavola dell'autore arabo che presenta in due delle sue colonne i valori di $x+y$ e di $x-y$, ci porge in questa maniera i numeri congrui

$$7,\ 23,\ 31,\ 41,\ 71,\ 239,\ 257,$$

che corrispondono alle combinazioni

$$\begin{cases} a=2,\ 13,\ 5,\ 5,\ 6,\ 12,\ 13. \\ b=1,\ 6,\ 4,\ 2,\ 5,\ 5,\ 4. \end{cases}$$

Questi congrui sono compresi nella forma 8. siccome è facile vedere ponendo

$$\begin{cases} n+\alpha+1=0,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 3. \\ n-\alpha=1,\ 3,\ 2,\ 1,\ -1,\ -2,\ 2. \end{cases}$$

Ma gli stessi numeri sono compresi anche nella forma 9. giacchè, se in luogo di $n+\alpha+1$ e di $n-\alpha$ si pone $n-\alpha$ e $-(n+\alpha+1)$, ovvero $-(n-\alpha)$ e $n+\alpha+1$, il congruo 8. si trasforma nel 9., ed il 9. nel 8. *)

*) Anche senza ricorrere a valori negativi di $(n+\alpha+1)$ o $(n-\alpha)$, neppure rendendo $n+\alpha+1 < n-\alpha$, ma prendendo i valori di x, y, z nei triangoli rettangoli 1, 0, 1; 3, 4, 5; 5, 12, 13, i congrui 7, 23, 31, 41, 71, 239, 257 risultano dalle forme 8. e 9. e dalle seguenti

$$10)\quad (x-y-2z)^2-2z^2, \qquad 11)\quad (x-y+2z)^2-2z^2$$

che si ottengono sostituendo nell'espressione IV. $a=x-y\mp z$, $b=z$.

È stato mostrato di sopra che le espressioni $x + y$ e $x - y$ sono le radici u e v dei due quadrati che soddisfanno alle equazioni fondamentali del problema dei numeri congrui

$$s^2 + k = u^2 , \qquad s^2 - k = v^2 .$$

Ora si scorge dalle cose precedenti che fra i valori di u e di v saranno compresi i numeri congrui contenuti nelle forme 8. 9. 10. e 11.

Si riconosce per altro che i valori della radice $u = x + y$ si ritrovano tutti tra quelli della radice $v = x - y$. Infatti si à

$$u = (a + b)^2 - 2b^2$$

$$v' = (a' - b')^2 - 2b'^2$$

e facendo

$$a' = 5a - 2b , \qquad b' = 2a - b$$

si avrà

$$v' = u.$$

Ora $5a - 2b$ e $2a - b$ sono primi tra sè; perchè, se fosse $5a - 2b = p\delta$ e $2a - b = q\delta$, si avrebbe $a = (p - 2q)\delta$ e $b = (2p - 5q)\delta$. Si vede inoltre che la somma

$$(5a - 2b) + (2a - b) = 7a - 3b$$

è sempre impari, non potendo a e b essere nello stesso tempo nè pari, nè impari; e per conseguenza la stessa cosa vale per $5a - 2b$ e $2a - b$. Dunque tutte le combinazioni a', b' si trovano fra le combinazioni a, b.

Similmente fra i valori di s, cioè fra le ipotenuse dei triangoli rettangoli numerici primitivi, sono compresi tutti i numeri congrui che risultano dalle forme 6. e 7. prendendo nella 6. n e α nello stesso tempo o pari o impari, e nella 7. l'uno pari e l'altro impari, e supponendo, come è stato detto, $n + \alpha + 1$ e $n - \alpha$ primi tra sè.

Fra i valori di s sono compresi ancora tutti i numeri congrui della forma 5., attesochè z e y sono primi tra sè, e $z + y$ impari.

Comparando la forma 3. alla forma $2xy$, si vede che dai valori calcolati dall'autor arabo si può ricavare ancora, se si vuole, il numero congruo

$$12) \qquad \pm\, 4xy(x^2 - y^2),$$

e si ottiene nello stesso tempo il teorema che *essendo dato un numero congruo* $2xy$ *può sempre determinarsi un altro numero congruo tale che il doppio prodotto dei due numeri sia anch'esso numero congruo.* Simile cosa si vede moltiplicando le due forme 1. e 2.

Lascio ad altra occasione lo svolgere queste ricerche con maggior estensione. Pure soggiungerò come esempio della forma $2xy$ e delle altre dodici forme di numeri congrui ottenute di sopra, le equazioni fondamentali del problema corrispondenti a quelle forme calcolati coi valori di $x = 15$, $y = 8$, $z = 17$.

$$z^2 \pm 2xy = 17^2 \pm 240 = 23^2,\ 7^2.$$

$$\left(\frac{z^2+x^2}{2y}\right)^2 \pm zx = \left(\frac{257}{8}\right)^2 \pm 255 = \left(\frac{287}{8}\right)^2, \left(\frac{223}{8}\right)^2.$$

$$\left(\frac{z^2+y^2}{2x}\right)^2 \pm zy = \left(\frac{353}{30}\right)^2 \pm 136 = \left(\frac{497}{30}\right)^2, \left(\frac{47}{30}\right)^2.$$

$$\left(\frac{x^4+y^4}{2xyz}\right)^2 \pm (x^2-y^2) = \left(\frac{54721}{4080}\right)^2 \pm 161 = \left(\frac{75329}{4080}\right)^2, \left(\frac{17729}{4080}\right)^2.$$

$$\left(\frac{z^4+x^4}{2xyz}\right)^2 \pm (z^2+x^2) = \left(\frac{134146}{4080}\right)^2 \pm 514 = \left(\frac{162946}{4080}\right)^2, \left(\frac{97154}{4080}\right)^2.$$

$$\left(\frac{z^4+y^4}{2xyz}\right)^2 \pm (z^2+y^2) = \left(\frac{87617}{4080}\right)^2 \pm 353 = \left(\frac{116417}{4080}\right)^2, \left(\frac{42433}{4080}\right)^2.$$

$$\left[\frac{\left(\frac{z+x}{2}\right)^4+(z-x)^4+\frac{8}{2}y^4}{2\left\{\left(\frac{z+x}{2}\right)^2-(z-x)^2\right\}y}\right]^2 \pm \left\{\left(\frac{z+x}{2}\right)^2+(z-x)^2\right\} = \left(\frac{4481}{252}\right)^2 \pm 260 = \left(\frac{6049}{252}\right)^2, \left(\frac{1889}{252}\right)^2.$$

$$\left[\frac{(z+x)^4+\left(\frac{z-x}{2}\right)^4+\frac{8}{2}y^4}{2\left\{(z+x)^2-\left(\frac{z-x}{2}\right)^2\right\}y}\right]^2 \pm \left\{(z+x)^2+\left(\frac{z-x}{2}\right)^2\right\} = \left(\frac{1054721}{16368}\right)^2 \pm 1025 =$$
$$= \left(\frac{1177729}{16368}\right)^2, \left(\frac{915329}{16368}\right)^2.$$

$$\left[\frac{(x+y)^4(x+y-2z)^4+16(x+y-z)^4z^4}{4(x-y)z(x+y-z)\{(x+y-z)^4-z^4\}}\right]^2 \pm \{(x+y-2z)^2-2z^2\} =$$
$$= \left(\frac{5829043537}{234834600}\right)^2 \pm 457 = \left(\frac{7692857713}{234834600}\right)^2, \left(\frac{2962336463}{234834600}\right)^2.$$

$$\left[\frac{(x+y)^4(x+y+2z)^4+16(x+y+z)^4z^4}{4(x-y)z(x+y+z)\{(x+y+z)^4-z^4\}}\right]^2 \pm \{(x+y+2z)^2-2z^2\} =$$
$$= \left(\frac{6375022035841}{47152160160}\right)^2 \pm 2671 = \left(\frac{6824911007359}{47152160160}\right)^2, \left(\frac{5890874439041}{47152160106}\right)^2.$$

$$\left[\frac{(x-y)^4(x-y-2z)^4+16(x-y-z)^4z^4}{4(x+y)z(x-y-z)\{(x-y-z)^4-z^4\}}\right]^2 \pm \{(x-y-2z)^2-2z^2\} =$$
$$= \left(\frac{14639349841}{1149868440}\right)^2 \pm 151 = \left(\frac{20346065359}{1149868440}\right)^2, \left(\frac{3828674959}{1149868440}\right)^2.$$

$$\left[\frac{(x-y)^4(x-y+2z)^4+16(x-y+z)^4z^4}{4(x+y)z(x-y+z)\{(x-y+z)^4-z^4\}}\right]^2 \pm \{(x-y+2z)^2-2z^2\} =$$
$$= \left(\frac{450148864897}{9318499680}\right)^2 \pm 1103 = \left(\frac{546271346303}{9318499680}\right)^2, \left(\frac{326887774847}{9318499680}\right)^2.$$

$$z^4 \pm 4xy(x^2-y^2) = 289^2 \pm 77280 = 401^2,\ 79^2.$$

Finalmente ho calcolato per tutti i triangoli rettangoli contenuti nella tavola dell'autor arabo, i numeri congrui risultanti dalle dodici forme svolte di sopra. Ho registrato nelle tavole che si vedono qui appresso, tutti questi numeri congrui insieme con quelli della forma $2xy$ già calcolati dal matematico arabo. Ho posto a lato a tutti quelli dei detti numeri che contengono fattori quadrati, i loro quozienti pel massimo divisore quadrato di ciascuno, ed ho distinto con una stelletta quelli che sono numeri primi, e col segno $2p$ quelli che sono doppi di numeri primi. Quanto ai fattori primi degli altri, è chiaro che non si può dir niente dei congrui contenenti i fattori $x = (a + b)(a - b)$ o $y = 2ab$. Fra gli altri i congrui 4. 5. 6. 7. essendo somme di due quadrati hanno tutti i loro fattori primi delle forme $8m + 1, 8m + 5$; pure quest'ultima forma dei fattori primi si deve escludere per i congrui 4. 5., atteso chè il 4. si può scrivere ancora $y^2 + 2x^2$ ed il 5. $x^2 + 2y^2$. I congrui 3. 8. 9. 10. 11. hanno i loro fattori primi delle forme $8m + 1$, $8m + 7$, perocchè il 3. si può scrivere $\pm (z^2 - 2y^2)$ di modo chè tanto il congruo 3. che i congrui 8. 9. 10. e 11. sono o della forma $g^2 - 2h^2$, o della forma $2g^2 - h^2$ equivalente a $g^2 - 2h^2$.

Seguon le tavole.

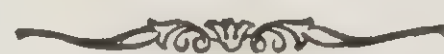
x	y	z	$2xy$	zx	zy	$\pm(x^2-y^2)$	z^2+x^2	z^2+y^2
3	4	5	24, 6 $2p$	15	20, 5 *	7 *	34 $2p$	41 *
5	12	13	120, 30	65	156, 39	119	194 $2p$	313 *
15	8	17	240, 15	255	136, 34 $2p$	161	514 $2p$	353 *
7	24	25	336, 21	175, 7 *	600, 6 $2p$	527	674 $2p$	1201 *
21	20	29	840, 210	609	580, 145	41 *	1282 $2p$	1241
35	12	37	840, 210	1295	444, 111	1081	2594 $2p$	1513
9	40	41	720, 5 *	369, 41 *	1640, 410	1519, 31 *	1762 $2p$	3281
45	28	53	2520, 70	2385, 265	1484, 371	1241	4834 $2p$	3593 *
11	60	61	1320, 330	671	3660, 915	3479, 71 *	3842	7321 *
63	16	65	2016, 142 p	4095, 455	1040, 65	3713	8194	4481 *
33	56	65	3696, 231	2145	3640, 910	2047	5314 $2p$	7361
55	48	73	5280, 330	4015	3504, 219	721	8354 $2p$	7633
77	36	85	5544, 154	6545	3060, 85	4633	13154 $2p$	8521 *
13	84	85	2184, 546	1105	7140, 1785	6887	73942 p	14281 *
39	80	89	6240, 390	3471	7120, 445	4879	9442 $2p$	14321 *
65	72	97	9360, 65	6305	6984, 194 $2p$	959	13634	14593 *
99	20	101	3960, 110	9999, 1111	2020, 505	9401	20002	10601 *
91	60	109	10920, 2730	9919	6540, 1635	4681	20162	15481
15	112	113	3360, 210	1695	12656, 791	12319	12994	25313
117	44	125	10296, 286	14625, 65	5500, 55	11753	29314 $2p$	17561
105	88	137	18480, 1155	14385	12056, 3014	3281	29794 $2p$	26513 *
143	24	145	6864, 429	20735	3480, 870	19873	41474	21601 *
17	144	145	4896, 34 $2p$	2465	20880, 145	20447	21314 $2p$	41761 *
51	140	149	14280, 3570	7599	20860, 5215	16999	24802 $2p$	41801 *
85	132	157	22440, 5610	13345	20724, 5181	10199	31874 $2p$	42073 *
119	120	169	28560, 1785	20111, 119	20280, 30	239 *	42722	42961 *
165	52	173	17160, 4290	28545	8996, 2249	24521	57154, 34 $2p$	32633 *
153	104	185	31824, 221	28305, 3145	19240, 4810	12593, 257 *	57634 $2p$	45041
57	176	185	20064, 1254	10545	32560, 2035	27727	37474	65201
95	168	193	31920, 1995	18335	32424, 8106	19199	46274	65473
195	28	197	10920, 2730	38415	5516, 1379	37241	76834	39593, 137 *
187	84	205	31416, 7854	38335	17220, 4305	27913	76994	49081 *
133	156	205	41496, 10374	27265	31980, 7995	6647, 23 *	59714	66361 *

x	y	z	$\left(\frac{z+x}{2}\right)^2+(z-x)^2$	$(z+x)^2+\left(\frac{z-x}{2}\right)^2$	$2z^2-(x+y-2z)^2$	$(x+y+2z)^2-2z^2$	$\pm\{(x-y-2z)^2-2z^2\}$	$\pm\{(x-y+2z)^2-2z^2\}$	$\pm 4xy(x^2-y^2)$
3	4	5	20, 5*	65	41*	239*	71*	31*	336, 21
5	12	13	145	340, 85	257*	1511*	751*	23*	28560, 1785
15	8	17	260, 65	1025, 41*	457*	2671*	151*	1103*	77280, 4830
7	24	25	580, 145	1105	889	5311	3239	161	354144, 22134
21	20	29	689	2516, 629	1393	8119	1567*	1799	68880, 4305
35	12	37	1300, 13*	5185	2009, 41*	11903*	137*	6671	1816080, 113505
9	40	41	1649	2756, 689	2273*	13799*	9407	761*	2187360, 310
45	28	53	2465	9620, 2405	4529	26423*	2303, 47*	9511*	6254640, 43435
11	60	61	3796, 949	5809	4841	29807	21799*	2113*	9184560, 11715
63	16	65	4100, 41*	16385	5849*	35231, 719*	1561	22879	14970816, 25991
33	56	65	3425, 137*	9860, 2465	6769	39511*	14959	2999*	15131424, 945714
55	48	73	4420, 1105	16465	8809	51343*	8663*	12751	7613760, 118965
77	36	85	6625, 265	26260, 6565	11201	65639	2191	30071*	51370704, 356741
13	84	85	7585	10900, 109*	9121	56839	43631	4649*	30082416, 1880151
39	80	89	6596, 1649	17009	12361	72367*	32119*	2927*	60889920, 951405
65	72	97	7585	26500, 265	15569*	90743	21583	16151	17952480, 124670
99	20	101	10004, 2501	40001	13513*	82639	5273*	58559	74455920, 517055
91	60	109	10324, 2581	40081	19273*	112399	11207	38239*	102233040, 6389565
15	112	113	13700, 137*	18785, 65	15737*	99071	78791*	8897	82783680, 1293495
117	44	125	14705	58580, 14645	23329	137671	79*	73079*	242017776, 1680679
105	88	137	15665	58820, 14705	30977*	180551	28511	47143*	121265760, 7579110
143	24	145	20740, 5185	82945	26921*	166799*	12809*	125231*	272816544, 17051034
17	144	145	22945	30340, 7585	25409*	161351	131839*	15481	200217024, 347599
51	140	149	19604, 29*	42401	32953	194719	105367*	721	485491440, 30343215
85	132	157	19825, 793	59860, 14965	39889	232663*	81023*	21991*	457731120, 28608195
119	120	169	23236, 5809	83569	47321	275807, 287	57799	56447	13651680, 853230
165	52	173	28625, 1145	114260, 28565	43217	257111	5569*	150823	841560720, 52597545
153	104	185	29585	114500, 1145	55681*	324679	34591*	107111	801519264, 113594
57	176	185	31025, 1241	62660, 15665	49681*	295159	170671	5449*	1112629056, 17384829
95	168	193	30340, 7585	85345, 505	59369*	346703	136183	23471, 479*	1225664160, 76604010
195	28	197	38420, 9605	153665	48377	303071	26089	237103	813343440, 50833965
187	84	205	38740, 9685	153745	64729, 1321*	379711	10199	179119*	1753829616, 109614351
133	156	205	33745	115540, 28885	69409	404551	103439, 2111*	65719*	551647824, 119301

SOPRA UNA TRASFORMAZIONE DELL' INTEGRALE ELITTICO.

NOTA

DEL SIG. PROF. FRANCESCO BRIOSCHI.



1.° Nella cubica:

$$\theta^3 + \alpha\theta^2 + \beta\theta + \gamma$$

pongasi:

$$\theta = \frac{3\gamma}{12\rho - \beta}$$

si otterrà:

$$(1) \qquad \theta^3 + \alpha\theta^2 + \beta\theta + \gamma = \frac{16\theta^2}{\gamma^2}(4\rho^3 - b\rho - c)$$

essendo:

$$b = \frac{1}{12}(\beta^2 - 3\alpha\gamma), \qquad c = \frac{1}{432}(9\alpha\beta\gamma - 27\gamma^2 - 2\beta^3);$$

ma dalla relazione fra θ, e ρ deducesi

$$d\theta = -4\frac{\theta^2}{\gamma}d\rho$$

quindi:

$$(2) \qquad \frac{d\theta}{\sqrt{(\theta^4 + \alpha\theta^3 + \beta\theta^2 + \gamma\theta)}} = -\frac{d\rho}{\sqrt{4\alpha\rho^3 - b\rho - c)}}.$$

Considero ora la forma biquadratica:

$$\varphi(x) = (a_0\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ a_4)(x, 1)^4.$$

Sia x_1 una radice della equazione $\varphi(x) = 0$ sostituendo alla x nella funzione $\varphi(x)$ il binomio $x_1 + \frac{\theta}{a_0}$, e ponendo:

$$\alpha = \frac{1}{2.3}\varphi'''(x_1), \quad \beta = \frac{1}{2}a_0\,\varphi''(x_1), \quad \gamma = a_0^2\,\rho'(x_1)$$

si otterrà:

$$(3) \qquad a_0^3\,\varphi\left(x_1 + \frac{\theta}{a_0}\right) = \theta^4 + \alpha\theta^3 + \beta\theta^2 + \gamma\theta;$$

inoltre essendo $dx = \frac{1}{a_0}d\theta$ si avrà per la (2):

$$\frac{dx}{\sqrt{a_0\,\varphi(x)}} = -\frac{d\rho}{\sqrt{(4\rho^3 - b\rho - c)}}$$

ed:

$$x = x_1 + \frac{3a_0\,\varphi'(x_1)}{12\rho - \frac{1}{2}a_0\,\varphi''(x_1)}\,.$$

Ma pei valori di α, β, γ si hanno facilmente le:

$$b = a_0^2(a_0\,a_4 - 4a_1\,a_3 + 3a_2^2)\;,\quad c = a_0^3(a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_0a_3^2 - a_2^3)$$

perciò indicando con s, t gl'invarianti quadratico e cubico della forma $\varphi(x)$, e ponendo:

$$\rho = -a_0\xi\sqrt{s}\;,\qquad m = \frac{t}{s\sqrt{s}}$$

si giungerà alle:

$$(4)\qquad \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{1}{\sqrt[4]{s}}\,\frac{d\xi}{\sqrt{-4\xi^3 + \xi - m}}\,,\qquad x = x_1 - \frac{6\varphi'(x_1)}{24\,\xi\sqrt{s} + \varphi''(x_1)}$$

Sia:

$$\psi(z) = (A_0\,,\,A_1\,,\,A_2\,,\,A_3\,,\,A_4)(z,\,1)^4$$

una seconda forma biquadratica; S, T gli invarianti della medesima, e z_1 una radice dell'equazione $\psi(z) = 0$; analogamente alle (4) si avranno le:

$$\frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}} = \frac{2}{\sqrt[4]{S}}\,\frac{d\xi}{\sqrt{-4\xi^3 + \xi - M}}\,,\qquad z = z_1 - \frac{6\psi'(z_1)}{24\xi\sqrt{S} + \psi''(z_1)}$$

essendo $M = \frac{T}{S\sqrt{S}}$. Ne consegue che se le due forme biquadratiche hanno la proprietà espressa dall'equazione:

$$m = M$$

la relazione:

$$(5)\qquad \frac{(x - x_1)\varphi''(x_1) + 6\varphi'(x_1)}{(x - x_1)\sqrt{s}} = \frac{(z - z_1)\psi''(z_1) + 6\psi'(z_1)}{(z - z_1)\sqrt{S}}$$

condurrà alla trasformazione:

$$\frac{dx\sqrt[4]{s}}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{dz\,\sqrt[4]{S}}{\sqrt{\psi(z)}}\,.$$

2.° Sieno $x_2\,,\;x_3\,,\;x_4\,;\;z_2\,,\;z_3\,,\;z_4$ le altre radici delle equazioni $\varphi(x) = 0$, $\psi(z) = 0$, e si pongano:

$$X_1 = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)\,,\qquad X_2 = (x_1 - x_3)(x_4 - x_2)\,,\qquad X_3 = (x_1 - x_4)(x_2 - x_3)$$
$$Z_1 = (z_1 - z_2)(z_3 - z_4)\,,\qquad Z_2 = (z_1 - z_3)(z_4 - z_2)\,,\qquad Z_3 = (z_1 - z_4)(z_2 - z_3).$$

È noto che gli invarianti s, t sono dati in funzioni delle radici dalle formole:

$$\frac{24}{a_0^2}\,s = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2\,, \qquad \frac{432}{a_0^3}\,t = (X_2 - X_3)(X_3 - X_1)(X_1 - X_2)$$

ossia essendo identicamente $X_1 + X_2 + X_3 = 0$:

$$\frac{12}{a_0^2}\,s = X_2^2 + X_2^2 + X_2\,X_3\,, \qquad \frac{432}{a_0^3}\,t = (X_3 - X_2)(2X_2^2 + 2X_3^2 + 5X_2\,X_3).$$

Ora ponendo:

$$X = \frac{i\sqrt{X_2} - \sqrt{X_2}}{i\sqrt{X_3} + \sqrt{X_2}}$$

si hanno le:

$$X^2 = \frac{(X_2 + X_3)^2}{(i\sqrt{X_3} + \sqrt{X_2})}\,, \qquad 1 + X^2 = \frac{2(X_2 - X_3)}{(i\sqrt{X_3} + \sqrt{X_2})^2}$$

dalle quali:

$$(1 + X^2)^2 + 12X^2 = 16\,\frac{X_2^2 + X_3^2 + X_2\,X_3}{i\sqrt{X_3} + \sqrt{X_2})^4}\,,$$

$$(1 + X^2)^2 - 36X^2 = -16\,\frac{2X_2^2 + 2X_3^2 + 5X_2X_3}{i\sqrt{X_3} + \sqrt{X_2})^4}$$

e sostituendo:

$$\frac{12}{a_0^2}\,s = \frac{1}{16}\,(1 + 14X^2 + X^4)(i\sqrt{X_3} + \sqrt{X_2})^4\,,$$

$$\frac{432}{a_0^3}\,t = \frac{1}{32}\,(1 + X^2)(1 - 34X^2 + X^4)(i\sqrt{X_3} + \sqrt{X_2})^6$$

ed in conseguenza:

$$m = \frac{(1 + X^2)(1 - 34X^2 + X^4)}{\left[3(1 + 14X^2 + X^4\right]^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Pongasi:

$$(6) \qquad \xi_1 = -\frac{1 + X^2}{\sqrt{3(1 + 14X^2 + X^4)}}$$

si dimostra facilmente essere ξ_1 una radice della equazione:

$$(7) \qquad 4\xi^3 - \xi + m = 0$$

e le altre due saranno date dalle:

$$\xi_2 = -\frac{1}{2}\,\xi_1\,\frac{1 + 6X + X^2}{1 + X^2}\,, \qquad \xi_2 = -\frac{1}{2}\,\xi_1\,\frac{1 - 6X + X^2}{1 + X^2}$$

ossia pei valori superiori:

$$\xi_1 = \frac{a_0}{12\sqrt{s}}(X_3 - X_2)\ ,\quad \xi_2 = \frac{a_0}{12\sqrt{s}}(X_1 - X_3)\ ,\quad \xi_3 = \frac{a_0}{12\sqrt{s}}(X_2 - X_1)$$

come d'altronde è noto.

Se quindi indichiamo con Z la espressione:

$$\frac{i\sqrt{Z_3} - \sqrt{Z_2}}{i\sqrt{Z_3} + \sqrt{Z_2}}$$

evidentemente per le (6) (7) la equazione $m = M$ condurrà alle:

$$(8)\qquad X^2 = Z^2\ ,\qquad X^2 = \frac{1}{Z^2}$$

ed essendo:

$$\varphi''(x_1) = 2a_0\left[3(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) + X_2 - X_3\right]$$

ed in conseguenza:

$$\frac{(x - x_1)\varphi''(x_1) + 6\varphi'(x_1)}{(x - x_1)\sqrt{s}} = \frac{6a_0}{\sqrt{s}}(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)\frac{x - x_2}{x - x_1} + 2a_0\frac{X_2 - X_3}{\sqrt{s}}$$

osservando alle relazioni:

$$(9)\qquad \frac{a_0}{\sqrt{s}}(X_2 - X_3) = \frac{A_0}{\sqrt{S}}(Z_2 - Z_3)\ ,\qquad \frac{a_0}{\sqrt{s}}\sqrt{X_2 X_3} = \frac{A_0}{\sqrt{S}}\sqrt{Z_2 Z_3}$$

si potrà dare alla sostituzione (5) la forma seguente:

$$(10)\qquad \frac{x - x_2}{x - x_1}\sqrt{\frac{(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}} = \frac{z - z_2}{z - z_1}\sqrt{\frac{(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)}}$$

Da ultimo essendo per le (9)

$$\frac{a_0}{\sqrt{s}}(i\sqrt{X_3} - \sqrt{X_2})^2 = \frac{A_0}{\sqrt{S}}(i\sqrt{Z_3} - \sqrt{Z_2})^2$$

si avrà:

$$(11)\qquad \sqrt[4]{\frac{S}{s}} = \pm\frac{i\sqrt{Z_3} - \sqrt{Z_2}}{i\sqrt{X_3} - \sqrt{X_2}}\sqrt{\frac{A_0}{a_0}} = \pm\frac{i\sqrt{Z_3} + \sqrt{Z_2}}{i\sqrt{X_3} + \sqrt{X_2}}\sqrt{\frac{A_0}{a_0}}\ .$$

Supponiamo:

$$\psi(z) = (1 - z^2)(1 - k^2 z^2)$$

quindi: $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = \frac{1}{k}$, $z_4 = -\frac{1}{k}$; le equazioni (8) daranno per la determinazione del modulo k le:

$$k^2 = X^2\ ,\qquad k^2 = \frac{1}{X^2}\ ,$$

*

la sostituzione (10) diverrà la seguente:

$$\frac{z+1}{x-1}=\frac{x-x_2}{x-x_1}\sqrt{\frac{(x_1-x_3)(x_1-x_4)}{(x_2-x_3)(x_2-x_4)}}$$

e la (11) darà:

$$\sqrt[4]{\frac{S}{s}}=\pm\frac{2}{\sqrt{a_0}}\frac{1}{i\sqrt{X_3}-\sqrt{X_2}}=\pm\frac{2k}{\sqrt{a_0}}\frac{1}{i\sqrt{X_3}+\sqrt{X_2}}\quad (*).$$

3.° A questi risultati potrebbesi giungere anche osservando che per le (1) (3) posto $\rho=-a_0\xi\sqrt{s}$ si hanno le seguenti:

$$(12)\quad \varphi(x)=-\frac{16(x-x_1)^4 s\sqrt{s}}{\varphi'^2(x_1)}(4\xi^3-\xi+m),\quad 14\,\xi\sqrt{s}=\frac{(x-x_1)\varphi''(x_1)+6\varphi'(x_1)}{x_1-x}$$

l'ultima delle quali può porsi sotto una qualunque delle forme:

$$(13)\qquad 12\,\xi\sqrt{s}=3a_0(x_1-x_3)(x_1-x_4)\frac{x-x_2}{x_1-x}+a_0(X_3-X_2)$$

$$=3a_0(x_1-x_4)(x_1-x_2)\frac{x-x_3}{x_1-x}+a_0(X_1-X_3)$$

$$=3a_0(x_1-x_2)(x_1-x_3)\frac{x-x_4}{x_1-x}+a_0(X_2-X_1).$$

Ora se nella (12) si sostituisce alla x la x_2 e si indica con ξ_1 il valore corrispondente di ξ_4 si ha identicamente:

$$4\xi_1^3-\xi_1+m=0$$

dunque ξ_1 è una radice dell'equazione (7) e dalla prima delle (13) si ha:

$$\xi_1=\frac{a_0}{12\sqrt{s}}(X_3-X_2)$$

come si è trovato di sopra. Da questo risultato potrebbe anche facilmente dedursi essere la (7) una risolvente dell'equazione biquadratica.

(*) Jacobi, Fundamenta Nova, pag. 15. Tabula III^a. — Cayley, Giornale di Crelle. Vol^e. 55.

DISCORSO COMMEMORATIVO

SU GUSTAVO PIETRO LEJEUNE DIRICHLET

PRONUNCIATO

DA E. E. KUMMER.

La importanza scientifica di Lejeune-Dirichlet e di E. E. Kummer, epperò la lusinga di fare cosa grata al pubblico matematico mi determinarono di dare alla stampa la traduzione del discorso commemorativo pronunciato nella seduta della Reale Accademia delle Scienze di Berlino il 5 Luglio 1860. La mia imperizia, aggiunta alla difficoltà di scostarsi in una traduzione dalla forma straniera, mi obbligano ad invocare l'indulgenza dei lettori, e quella poi specialmente dell'illustre Autore, se lo stile della traduzione è troppo al di sotto dell'originale.

Pavia, Novembre 1860.

Felice Casorati.

Non sono trascorsi dieci anni da che i tre uomini, ai quali la nostra patria tedesca va debitrice d'una nuova epoca fiorente per le scienze matematiche, Gauss, Jacobi e Dirichlet, ancor vivevano ed attivamente adoperavansi a rinnovare e consolidare splendidamente l'antica fama di profonda conoscenza delle verità matematiche sì astratte che realizzate in natura, fama che prima di tutti avevano acquistata alla nazione tedesca Keplero e Leibnitz. La nostra Accademia aveva allora la fortuna di possedere come membri attivi due di questi uomini distinti, Jacobi e Dirichlet, i quali, legati da personale amicizia, colla aperta comunicazione dei loro profondi pensieri, si eccitavano e giovavano a vicenda, esercitando la più durevole influenza sullo sviluppo generale delle scienze matematiche. La morte immatura di Jacobi fu la prima perdita irreparabile che colpì la scienza salita in fiore nella nostra patria. L'importanza delle scoperte di questo investigatore di raro ingegno, il posto distinto che terrà per sempre nella storia della matematica vennero dipinti con tanta profondità e verità da Dirichlet, nel discorso commemorativo pronunziato or sono otto anni in questo luogo, ch'egli ebbe per tal mezzo ad erigere alla memoria dell'estinto il più bello e più degno monumento. Allorchè, quattro anni dopo Jacobi, onorò il vecchio Gauss, reputato incontrastabilmente il primo matematico del suo tempo, a questa perdita grave e generale teneva dietro per la nostra Accademia anche la deplorabile conseguenza, che Dirichlet, siccome l'unico degno successore del grand'uomo, era chiamato a Got-

tinga; cessando così di esserne fra i membri presenti. L'Accademia, che non poteva impedire nè riparare tal perdita, colla elezione di Dirichlet a membro effettivo estraneo, riserbavasi il diritto di poterlo considerare ancora come uno de'suoi; quanto poi ai di lui particolari amici di studio, rimase il centro vivente delle loro speculazioni e dei loro lavori, sino a che la morte pose termine alla sua vita ed attività. La nostra Accademia, cui Dirichlet appartenne per ventisette anni, e negli scritti della quale trovavansi depositati gl'immortali capolavori di lui, nel mentre ha il diritto di riguardare come propria la gloria scientifica di questo grande matematico, ha per ciò stesso più di tutti il dovere di conservarne la ricordanza e di tributargli l' estremo onore accademico con pubblica orazione commemorativa. La venerazione che io stesso nutrii costantemente per l'estinto, l'amicizia della quale mi fu largo e che mi conservò per più di venti anni, come pure la stretta relazione fra i miei studj ed i suoi scientifici lavori, mi hanno determinato a prendere la parola al cospetto di questa ragguardevolissima adunanza, per dire della grande importanza scientifica de'suoi capolavori, e delineare nel tempo stesso in pochi tratti l'immagine della sua vita e del suo carattere, il quale era nobile e puro come i suoi scritti. So che non mi sarà dato raggiungere che assai imperfettamente il propostomi intento, non solo perchè la vera importanza delle scoperte intellettuali di grandi uomini non può essere giustamente riconosciuta ed apprezzata che nel successivo corso storico della scienza, in cui le medesime diventano non di rado punti di partenza di teoriche le quali ricevono ampio sviluppo, ma anche per la mia debolezza a motivo di cui io debbo permettermi di far appello alla vostra benigna indulgenza.

Gustavo Pietro Lejeune-Dirichlet nacque il 13 Febbrajo 1805 in Durena. Suo padre, direttore della posta colà, uomo dolce, piacevole ed amabile, e sua madre tuttodì vivente in molto avanzata età, signora spiritosa e finamente educata, diedero al fanciullo, dotato da natura di talenti più che ordinarj, accuratissima educazione. Egli ricevette la prima istruzione in una scuola elementare, e quando questa non fu più trovata sufficiente per lui, in una scuola privata, dove venne altresì istruito specialmente nella lingua latina, onde potesse in seguito frequentare un ginnasio. La sua grande predilezione per la matematica si palesò assai prestamente, poichè non ancora compiti i dodici anni, impiegava il denaro del suo borsellino nell' acquisto di libri matematici, coi quali si occupava molto assiduamente in ispecie alla sera; e se gli si diceva non poterli comprendere, rispondeva: li leggo tante volte finchè li comprendo. I suoi genitori desideravano che facesse il negoziante, ma avendo egli mostrato decisa ripugnanza per tal carriera, essi cedettero e lo mandarono nell'anno 1817 al ginnasio di Bonna.

Per amichevole comunicazione del Sig. Prof. Elvenich in Breslavia, che abitava allora in Bonna la stessa casa col giovane Dirichlet, ed al quale era raccomandata

caldamente dai solleciti genitori la sorveglianza e direzione del medesimo, mi trovo in grado di fornire la seguente fedele e viva descrizione del fanciullo, allora in età di circa 13 anni. Distinguevasi assai vantaggiosamente nella condotta per bella grazia e buoni costumi, e la ingenuità e schiettezza de'suoi modi facevano sì che tutti quelli i quali trattavano con lui gli erano cordialmente propensi. Le sue cure erano regolate, di preferenza però dirette alla matematica ed alla storia. Studiava quand'anche non aveva lavori scolastici, allora pure essendo lo svegliato suo ingegno occupato continuamente di argomenti degni di meditazione. I grandi avvenimenti storici, come segnatamente la rivoluzione francese, ed i pubblici affari lo interessavano in alto grado, e giudicava sopra questo ed altre cose con una indipendenza e franchezza di pensare insolito per la sua giovinezza, frutto forse della educazione ricevuta dai genitori. Qualunque cosa sgarbata ed ignobile eragli contraria, anche i giuochi però ed altri sollazzi giovanili avevano per lui quasi nessuna attrattiva, mentre amava i trattenimenti amichevoli e partecipava volentieri e vivacemente in special modo ai discorsi di politica e di storia. In generale il suo spirito, del quale la dote eminente era l'acutezza, s'aggirava in una sfera assai più elevata di quello che avvenga solitamente in altri della stessa età.

Al ginnasio di Bonna rimase soltanto due anni, trasferendosi invece a quello dei Gesuiti in Colonia , al quale i suoi genitori diedero la preferenza per motivi a me ignoti. Qui ebbe a maestro nella matematica quel Giorgio Simone Ohm, che divenne poi celebre per la scoperta della legge circa le resistenze alla propagazione delle correnti elettriche, che da lui prese nome; ed in virtù della istruzione che ne ricevette e del proprio assiduo studio di opere matematiche, Dirichlet fece in tale scienza progressi molto rilevanti, procacciandosi estensione straordinaria di cognizioni. Frattanto non trascurò punto le altre discipline e rapidissimamente compì il corso ginnasiale , di modo che nel 1821, all'età di soli sedici anni, ottenne l'attestato per poter entrare nell'Università, e fè ritorno a casa, affine di deliberare co'suoi genitori intorno la scelta della futura carriera. Era ben naturale che questi opponessero alla sua determinazione di studiare matematica il serio avvertimento di assicurare la sua posizione sociale con uno studio più pratico, e come tale gli progettavano la giurisprudenza; però egli dichiarò loro modestamente ma con risolutezza che se lo esigessero li avrebbe assecondati, che per altro non potrebbe abbandonare lo studio prediletto, a cui dedicherebbe almeno le notti. Dietro di che i genitori ragionevoli quanto delicati cedettero al fermo desiderio del figlio.

Lo studio matematico nell'università della Prussia e della rimanente Germania era allora in miserrimo stato. Le lezioni elevandosi di poco al disopra della sfera della matematica elementare erano affatto insufficienti ad appagare lo stimolo di cognizioni più profonde, che animava il giovane Dirichlet, non eravi in Germania , fuori dell'

unico gran nome di Gauss, niun'altro che avesse potuto esercitare su di lui una speciale attrazione. In Francia all'incontro e segnatamente in Parigi, la matematica era ancora nella sua piena floridezza, ed un circolo di uomini, il gran nome de'quali risplenderà eternamente nella storia delle matematiche, si adoperava coll'investigazione e coll'insegnamento a svilupparle e diffonderle efficacemente. Quivi peranco viveva il grande Laplace, al quale la Meccanica Celeste assicurava incontrastabilmente il primo posto, lavorando tuttora al compimento di quest'opera e ad un supplemento della sua teorica della probabilità. Legendre, sino alla avanzata età indefessamente operoso, stava perfezionando la sua teorica delle funzioni ellittiche, colla scoperta di una nuova trasformazione delle medesime, e preparando la terza edizione dell'opera sulla teorica dei numeri. Fourier, che da poco tempo aveva terminata la teorica matematica del calore, riuniva intorno a se in scientifiche e gioviali conversazioni un' eletta schiera dei giovani matematici più ingegnosi. Poisson arricchiva la Meccanica e la Fisica matematica di una serie di memorie pregiatissime. Cauchy poneva allora i fondamenti per migliorare e riformare radicalmente tutta quanta l'analisi, con metodi più rigorosi e colla introduzione delle variabili immaginarie. Questi uomini non che un ragguardevole numero di altre scientifiche notabilità, delle quali alcune vivono tuttora, cooperavano a rendere Parigi la più splendida sede delle scienze matematiche.

Giustamente apprezzando tali circostanze, Dirichlet riconobbe ch'era questo il sito, d'onde poteva aspettarsi pe'suoi studj matematici il maggiore profitto, ed acconsentendovi di buon grado i suoi genitori, i quali per mezzo di alcune famiglie amiche erano da molto tempo in relazione con Parigi, egli recossi nel Maggio del 1822 a codesta scuola superiore delle matematiche discipline, colla lieta coscienza di potersi ormai dedicare completamente allo studio prediletto. Quivi frequentò le lezioni al Collegio di Francia ed alla Facoltà delle Scienze, dove ebbe a maestri Lacroix, Biot, Hachette e Francoeur. Un tentativo da lui fatto di poter assistere anche alle lezioni alla Scuola Politecnica come *ospitante* andò fallito, perchè l'incaricato d'affari prussiano a Parigi non volle assumersi, senza speciale autorizzazione del Ministro di Altenstein, di chiederne il permesso al Ministro francese.

Oltre di assistere alle lezioni e di meditare sugli argomenti in esse esposti, il Dirichlet dedicava il tempo anche all'attento studio delle migliori opere matematiche, e fra queste specialmente al lavoro di Gauss intorno l'Aritmetica superiore: *Disquisitiones Arithmeticae*. Siffatto lavoro esercitò su tutta la educazione e sull'indirizzo matematico di lui un' influenza assai più rilevante che non gli altri suoi studj di Parigi; non una nè parecchie volte egli ebbe a studiarlo, ma per tutta la vita non cessò mai con ripetuta lettura di richiamarsi alla mente la copia dei profondi pensieri in esso contenuti, per cui il medesimo non trovavasi mai nello Scaffale, ma aveva un posto fisso sul tavolino di lavoro. Quale sforzo gli abbia dovuto costare l'addentrarsi

in quest'opera straordinaria, si può desumere da ciò che più di venti anni dopo la sua comparsa, nessuno peranco dei matematici allora viventi l'aveva studiata e compresa interamente, e che Legendre stesso, il quale aveva dedicato gran parte della sua vita all'Aritmetica superiore, dovette confessare nella seconda edizione della sua teorica dei numeri, che avrebbe volentieri arricchito il suo lavoro dei risultati di Gauss, ma i metodi di questo autore essere sì originali da non poterli riprodurre senza enormemente dilungarsi od assumere la parte di semplice traduttore. Dirichlet fu il primo non solo a comprendere perfettamente tale lavoro, ma anche ad aprirne l'adito ad altri, rendendo facili e chiari i rigidi metodi, dietro i quali stavano celati i profondi pensieri, e scambiandoli in molti punti principali con altri più semplici e più conformi alla genesi, senza rinunciare menomamente al perfetto rigore delle dimostrazioni; egli fu eziandio il primo che oltrepassandone i confini abbia manifestato un ricco tesoro di segreti ancor più profondi nella teorica dei numeri.

La vita esteriore di Dirichlet nel primo anno di soggiorno in Parigi era sommamente semplice e ritirata. I suoi studj, interrotti una sola volta in causa di un'attacco di vajuolo, lo assorbivano completamente, limitandosi egli a frequentare alcune case, alle quali era raccomandato, ed a trovarsi con alcuni giovani tedeschi, ivi dimoranti per istudiare. Ma nell' estate del 1823 sopravvenne un cambiamento della più grande importanza per la intiera sua educazione. Il generale Foy, uomo pien di spirito e di molteplice cultura, non meno distinto per l'alto posto che teneva come capo dell'opposizione nella camera dei deputati e come uno de'più celebri oratori della medesima, quanto per la brillante sua carriera militare, e la cui casa era una delle più ragguardevoli ed ambite in Parigi, cercava allora un giovane a maestro de'suoi figli, il quale li avesse ad istruire principalmente nella lingua e letteratura tedesca; per tale ufficio fu raccomandato al generale il nostro Dirichlet, da un'amico di casa Dirichlet, il Sig. Larchet de Chamont. Presentatosi per la prima volta, le sue maniere aperte e modeste fecero sul Generale impressione sì favorevole, che gli affidò tosto l'ufficio di maestro dei figli, con stipendio conveniente ed obblighi tanto lievi, da rimanergli libertà di tempo bastante per continuare gli studj intrapresi. Dirichlet assunse con giubilo siffatto incarico, non solo perchè veniva messo in posizione di non cagionare ulteriori spese a'suoi genitori, ma principalmente anche perchè dalla dimora in casa d'uomo sì perfettamente educato e distinto ripromettevasi molto per la propria educazione esteriore, nella quale a suo proprio giudizio era peranco assai indietro. In questa nuova posizione egli sentivasi straordinariamente contento e felice, dappoichè i signori conjugi Foy dimostravangli in ogni cosa la più grande amorevolezza e cortesia, considerandolo qual membro della loro famiglia. L'istruzione dei figli, dei quali una fanciulla di undici anni era la maggiore, costavagli poca fatica; la moglie poi del generale che, addistrata nella sua fanciullezza nella lingua tedesca,

avendola in seguito completamente dimenticata, tornò ora sotto la sua direzione a coltivarla diligentemente e col miglior successo, lo ricompensava della fatica in modo tanto aggradevole quanto utile, correggendogli, mediante esercizj di lettura in lingua francese, l'accento straniero della pronuncia. La più grande influenza su di lui l'esercitava però il Generale, coll'esempio vivente di uomo operoso, nobile e finamente educato, e questa influenza non estendevasi soltanto alla esteriore educazione di Dirichlet, alle sue abitudini ed inclinazioni, sibbene anche al suo modo di pensare e di agire ed a tutte le contingenze della vita. Di grande importanza per tutta la sua vita fu pure che la casa del Generale, punto di riunione delle prime notabilità scientifiche ed artistiche della capitale francese, e nella quale venivano trattate dai più ragguardevoli membri della camera le grandi questioni politiche, la cui prossima e preliminare soluzione seguiva nell'anno 1830, gli diede per la prima volta occasione di vedere la vita in grande scala e di interessarvisi.

Da tutte queste nuove impressioni che riceveva, dalle occupazioni e distrazioni che andarono congiunte al suo posto, Dirichlet non lasciavasi punto deviare da'suoi studj matematici, anzi precisamente in questo tempo preparava con fervido zelo il primo scritto dato alla luce: *Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré.* L'argomento di questa memoria ha il più stretto rapporto col teorema di Fermat, che la somme delle eguali potenze di due numeri non può mai essere eguale ad una sola potenza dello stesso ordine delle precedenti, ove queste potenze siano superiori alla seconda. Siffatto teorema, cui Fermat asserisce di poter dimostrare, che però sino oltre 150 anni dopo Fermat, nel tempo in cui Dirichlet se ne occupava, non ostante i più grandi sforzi di Eulero e Legendre, non aveva potuto dimostrarsi più in là della terza e quarta potenza, siffatto teorema, come particolarità tolta dalla propria concatenazione scientifica, non ha veramente diritto ad alcun valore speciale; tuttavia ha conseguito una importanza straordinaria per ciò che essendo un punto di mira apparentemente vicino ma in effetto ancora lontano innalzato nel campo delle forme dei gradi superiori allora peranco sconosciuto, esercitò la più decisiva influenza sull'indirizzo preso dalla teorica dei numeri nel proprio sviluppo storico. Dirichlet, seguendo nel suo lavoro la via segnata dal teorema di Fermat, considerava la somma di due quinte potenze, circa le quali nulla ancora si era trovato, e si propone in pari tempo la questione un po'più generale, di ricercare cioè in quali casi tale somma non possa essere eguale ad un multiplo dato di una quinta potenza. Egli rendesi piana e sicura la via della ricerca, mediante alcuni teoremi intorno la soluzione la più generale della questione: rendere una forma quadratica eguale ad una potenza d'un numero, e riesce a dimostrare la impossibilità di una classe intiera di equazioni del quinto grado. La equazione di Fermat per le quinte potenze, delle quali una necessariamente dovrebb'essere divisibile per cin-

que, è soltanto nel caso in cui questa sia anche pari che trovasi compresa nella classe suddetta; tuttavia l'altro caso, in cui la medesima sia dispari, fu similmente dimostrato impossibile poco tempo dopo da Legendre, che si avanzò un po' più ancora nel cammino aperto da Dirichlet. L'onore pertanto di avere spinta d'un intiero gradino più in là la dimostrazione di questo teorema storicamente rimarchevole va diviso fra Dirichlet, e Legendre.

Non soltanto i nuovi risultati ottenuti in una delle parti più difficili della teorica dei numeri, ma eziandio la forza e sottigliezza delle dimostrazioni e la singolare chiarezza della esposizione assicuravano a questo primo lavoro di Dirichlet un brillante successo. l'Accademia di Parigi, a cui lo presentò gliene accordava la lettura nella seduta dell'undici giugno 1825, e tantosto nella seduta susseguente, del diciotto di detto mese, i Sigg. Lacroix e Legendre ne presentavano quali commissari un rapporto sì favorevole, che l'Accademia decideva di farlo inserire nelle raccolta delle memorie dei dotti stranieri. La fama di Dirichlet come matematico distinto veniva perciò stabilita, e d'allora in poi come giovane, dal quale attendevasi uno splendido avvenire, fu nei più elevati circoli scientifici di Parigi non solo ammesso ma anche cercato. Egli entrò per tal guisa in più stretta relazione con parecchi dei più ragguardevoli membri dell'Accademia di Parigi, fra i quali debbonsi rimarcare specialmente due, cioè Fourier ed Alessandro di Humboldt, che esercitarono molta influenza, il primo sull' indirizzo delle sue investigazioni scientifiche, il secondo sullo sviluppo successivo della sua vita esteriore.

Fourier, il quale dalla propria giovinezza, in cui erasi attivamente adoperato alla fondazione della Scuola Normale e della Scuola Politecnica, conservava ancora intatto l'entusiasmo per una animata corrispondenza scientifica, e pel quale era un'intimo bisogno il comunicare anche a viva voce quanto di bello e di grande aveva investigato, trovò in Dirichlet un giovane, cui poter aprire completamente il suo cuore matematico, e dal quale era non soltanto ammirato, ma anche perfettamente compreso. Lo introdusse quindi nel circolo dei distinti giovani matematici, che soleva riunire intorno a se, coi quali s'intratteneva nei modi vivaci ed attraenti propri di lui sulla sua teorica del calore, e sopra i suoi nuovi metodi analitici a tale scopo trovati, come pure sopra ogni specie di argomenti e questioni più generali nella scienza. In questo circolo, al quale apparteneva fra gli altri anche Sturm, divenuto poco dopo celebre pel teorema sopra le radici delle equazioni algebriche, Dirichlet ricevette molteplici eccitamenti, ma segnatamente da Fourier fu promosso il suo interesse per la fisica matematica, nella quale lavorò in seguito con rilevante successo; così pure ne' suoi successivi lavori prendono un posto non indifferente la serie e gl'integrali di Fourier, che debbono ai metodi rigorosi di Dirichlet il loro vero fondamento scientifico.

Alessandro di Humboldt allora dimorante in Parigi, aveva già dapprima dal Ge-

nerale Foy udito lodare Dirichlet come matematico distinto, ma senza attribuire molto peso all'elogio, che non sortiva dalle labbra di uomo versato nella materia; e però non lo conobbe più davvicino se non quando Dirichlet presentossi a fargli visita, dietro la favorevole accoglienza fatta al suo scritto dall'Accademia. Humboldt lo accolse colla più squisita amorevolezza e cortesia, attestandogli colla stima pel suo talento, e la sua abilità scientifica anche il più vivo interessamento ed affetto, che d'allora in poi gli mantenne incessantemente, e gli provò coi fatti. Sino da questa prima visita Dirichlet diede a conoscere nel discorso la intenzione di fare in seguito ritorno in patria, ed Humboldt, accogliendo con gioja tale pensiero, lo rafforzò nel proposito coll'assicurazione, che, stante l'estrema scarsezza di valenti matematici tedeschi, non avrebbe potuto mancargli una eccellente posizione, tostochè l'avesse desiderata. Nelle condizioni di quel tempo, mentre appunto eransi dovute abbandonare le pratiche proseguite parecchi anni onde far venire Gauss a Berlino, per poche centinaja di talleri, siffatta assicurazione non era facilmente adempibile, e poco dopo ci volle la instancabile attività e tutta quanta la influenza di Humboldt per rializzarla anche solo approssimativamente.

Per la morte avvenuta nel Novembre del 1825 del suo protettore sommamente venerato, il Generale Foy, e per la influenza di Alessandro di Humboldt, che abbandonò dopo poco tempo Parigi onde stabilirsi in Berlino, la risoluzione di Dirichlet di far ritorno in patria venne a maturanza. Indirizzò al Ministro di Altenstein una istanza per ottenere un collocamento conveniente, istanza che Humboldt prese ad appoggiare, e rendere efficace mercè la propria influenza; e ritornò nell'autunno del 1826 a Durena presso i suoi genitori, onde aspettarne l'esito.

Mentre quivi attendeva ad una nuova memoria, di cui avrò quanto prima a parlare, Humboldt ne promoveva col più gran zelo il collocamento. Affine di ottenere per Dirichlet un posto di professore straordinario presso qualche università prussiana, collo stipendio di sei ad ottocento talleri, si rivolse personalmente al Ministro di Altenstein, interessò a tale intento i più ragguardevoli membri della nostra Accademia, rinforzando così la propria raccomandazione colla loro, e diede a Dirichlet relazioni frequenti e buoni consigli su ciò che per parte sua dovesse fare, con tutte queste premure però, che Gauss istesso appoggiò mediante uno scritto diretto al nostro collega Sig. Encke, e da esso consegnato al regio ministero, altro non si potè tuttavia ottenere se non che gli fossero assicurati annualmente 400 talleri come rimunerazione fissa, onde potesse abilitarsi a Breslavia nella qualità di docente privato. Tale rimunerazione assicurandogli tosto una discreta sussistenza e potendo far conto che Humboldt avrebbe continuato ad adoperarsi per procacciargli una posizione più conveniente, accettò senza difficoltà. Frattanto *honoris causa* era anche stato eletto dottore di filosofia della facoltà filosofica dell'università di Bonna, la quale cosa gli rese assai più facile l'abilitazione ad una università.

Nel recarsi a Breslavia scelse la via per Gottinga, affine di conoscere Gauss personalmente, al quale si presentò il 18 di Marzo del 1827. Notizie più dettagliate di tale incontro non mi fu possibile avere; una lettera d'allora diretta alla madre di lui altro non dice che Gauss lo accolse molto amichevolmente, e l'impressione personale di questo grand'uomo fu assai più favorevole di quello che si aspettasse.

Ora in Breslavia, secondo gli statuti di quella facoltà filosofica, per ottenere la *venia docendi*, doveva fare una lezione di prova, tenere un discorso innanzi alla facoltà, scrivere una dissertazione, e difenderla pubblicamente in lingua latina. A tali esigenze , in quanto riferivansi alla sua scienza era più che idoneo, sapeva altresì scrivere benissimo chiaramente e correttamente latino sopra un'argomento scientifico, ma non aveva mai impiegato il suo tempo, destinato a più elevati scopi scientifici, nel procacciarsi la disinvoltura della favella latina; la vuota formalità della disputa latina lo disturbava e gli spiaceva quindi in alto grado. Con sua grande soddisfazione, ma con grande cordoglio di alcuni signori di quella facoltà, dopo ch'ebbe tenuto la lezione di prova sulla irrazionalità del numero π, venne dal regio ministero dispensato dalla pubblica disputa , ed affinchè potesse subito cominciare le lezioni , senza delle quali la scienza matematica sarebbe quivi rimasta quasi senza alcuna rappresentanza, ottenne in pari tempo il permesso di non presentare che posteriormente il suo scritto latino di abilitazione.

Il successo dell'attività sua nell' istruire nei tre semestri duranti i quali insegnò in Breslavia non fu rilevante. Gli studenti di quel sito , non spingendosi volentieri oltre l'angusta sfera di idee matematiche loro insino a quel tempo somministrate, non potevano abituarsi tanto facilmente alla sua maniera d'insegnare, per essi straniera, di più il suo modo di presentarsi modesto e persino un po'peritoso non era fatto per imporre loro. In generale Dirichlet in Breslavia era bensì veduto di buon grado e cercato in tutte le società, come giovane finamente educato ed amabile, ma come matematico era poco apprezzato in confronto del suo predecessore, il quale aveva scritto un trattato di Geometria analitica. Non parlando mai di se, e de' suoi meriti scientifici, ne avendo alcun appoggio letterario, che ciò si assumesse a suo favore, così non raggiunse ivi quella celebrità locale o provinciale, che in circoli ristretti, è più efficace che l'essere universalmente riconosciuto da parte dei primi uomini della scienza.

Durante la sua dimora in Breslavia, Dirichlet scrisse due memorie, che ebbero entrambe origine dalla memoria di Gauss sui residui biquadratici. Le *gelehrten Auzeigen* di Gottinga dell'Aprile 1825 avevano dato un succinto annuncio di una serie di memorie sopra i residui biquadratici e le loro leggi di reciprocità, che Gauss pensava di pubblicare, delle quali la prima era altresì già presentata alla Società delle Scienze di Gottinga, ma non veniva alla luce che tre anni dopo. Tale annuncio, che esponeva alcuni dei risultati di Gauss, le dimostrazioni dei quali dovevano basarsi so-

pra un principio affatto nuovo della teorica dei numeri, eccitò in alto grado la sete di sapere simultaneamente di Jacobi e Dirichlet; entrambi cercarono per vie affatto diverse di penetrare nel segreto di Gauss, e ad entrambi pure riuscì di trovare in questo campo dei residui di potenze superiori una moltitudine di progressioni nuove, sebbene il nuovo principio, consistente nella introduzione dei numeri interi complessi, rimanesse loro ancora nascosta. Dirichlet trovò pei teoremi di Gauss già pubblicati, contenenti la completa soluzione della questione: « assegnare tutti i numeri primi pei quali il numero due è residuo o non residuo biquadratico » trovò dimostrazioni di una semplicità meravigliosa, coi metodi noti della teorica dei numeri, e nello stesso modo risolvette anche la questione più generale per qualsiasi numero primo dato, così che onde giungere alla completa legge di reciprocità per i residui biquadratici, rimaneva ancora un solo passo a fare, il quale però non divenne possibile che col nuovo principio di Gauss. Nell'altro scritto allora pubblicato, che Dirichlet stese in lontano e presentò alla Facoltà Filosofica come suo scritto di abilitazione, fornisce un'esempio allora affatto nuovo di forme di gradi comunque elevati, i divisori delle quali hanno determinate forme lineari. I risultati di questo lavoro possono presentemente risguardarsi come casi particolari dei teoremi generali sopra i divisori delle norme dei numeri complessi formati da radici dell'unità.

Per dare un saggio del merito, che si attribuiva allora segnatamente al primo di questi due lavori, addurrò i giudizj sul medesimo di Bessel e Fourier. Bessel scrive in una lettera ad Humboldt: Chi avrebbe pensato che al genio sarebbe riuscito di ridurre a considerazioni tanto semplici cose di apparenza sì difficile; sulla memoria potevasi trovare il nome di Lagrange che nessuno ne avrebbe rimarcata la falsità. Fourier invece pose i risultati di Dirichlet persino al di sopra delle grandi scoperte di Jacobi e di Abel nella teorica delle funzioni ellittiche, delle quali per verità egli non aveva avuto conoscienza se non pegli elogi di Legendre, che riteneva eccessivi. In una lettera diretta a Dirichlet, come pure in manifestazioni a voce fatte all'amico su citato della famiglia Dirichlet, il Sig. Larchet de Chamont, dalle quali è tolta la sentenza riferita, esprime anche il vivo desiderio, che Dirichlet avesse a ritornare a Parigi, siccome destinato a presto occupare uno dei primi posti in quell'Accademia.

Frattanto Alessandro di Humboldt aveva ottenuta la nomina di Dirichlet a professore straordinario all'università di Breslavia, e poscia si adoperava di guadagnarlo a questa Università ed all'Accademia, ed anzitutto insomma di farlo venire a Berlino. Un posto d'insegnamento matematico, che diveniva vacante alla scuola militare generale, avendone fornita l'opportunità, Humboldt ne approfittò per raccomandare assai caldamente Dirichlet al generale di Radowitz ed al ministro della guerra. Costoro tuttavia non potevano decidersi subito ad affidargli definitivamente la carica, verosimilmente perchè allora non contando che 23 anni poteva sembrare troppo gio-

vane; perciò si fece in modo presso il ministro di Altenstein che Dirichlet ottenesse tosto il permesso di un'anno, affine di assumere provisoriamente l'insegnamento alla scuola militare.

Nell'autunno del 1828 egli veniva a Berlino onde entrare nella nuova carica. Le lezioni di mattematica che doveva dare ad ufficiali circa della sua età gli facevano molto piacere, la relazione con militari educati, ai quali era avvezzo sino dalla sua dimora nella casa del generale Foy, eragli assai gradita, e siccome in quel tempo aveva fatto fra gli altri anche studj fondamentali nella moderna storia militare, così oltre la matematica era vincolato a'suoi uditori eziandio da questo comune interesse. E non fu che più tardi, dopo essersi formato a questa università un gran circolo di uditori che lo seguivano col maggiore interessamento scientifico nelle più alte sfere della matematica, nelle quali egli preferiva sommamente di aggirarsi, che svegliossi in lui il desiderio di essere esonerato dall'insegnamento alla scuola militare, il quale desiderio fu poi uno dei principali motivi della sua traslocazione a Gottinga.

Non appena giunto in Berlino Dirichlet fece anche i passi necessarj da poter dare lezioni presso questa università. Come professore di un' altra università non vi era autorizzato; non gli rimase quindi se non che di farsi abilitare nuovamente come docente privato, ed in tali sensi presentò istanza alla facoltà filosofica. La quale gli rilasciò il decreto di abilitazione in vista della sua abilità scientifica altrove provata, e così cominciò a dare lezioni sotto il titolo di docente privato. Il suo collocamento definitivo presso questa università, come professore straordinario, non seguì che nel 1831, e dopo alcuni mesi fu eletto dalla nostra Accademia a membro ordinario. Nello stesso anno si unì in matrimonio con Rebecca Mendelssohn-Bartholdy nipote di Mosè Mendelssohn, ed in ciò pure ebbe parte notabile, ma involontaria Alessandro di Humboldt, siccome quegli che introdusse per la prima volta Dirichlet nella famiglia dei genitori della moglie, famiglia distinta e rinomata per spirito e talento artistico.

I casi successivi della vita scompajono ora per lungo tempo di fronte all'importanza dei lavori scientifici da lui eseguiti, durante i 27 anni che visse in questo luogo. Nella descrizione che ora m'incombe di farne, tenterò di esporre a grandi tratti ed in generale i progressi scientifici in essi contenuti, considerandoli non isolatamente a seconda del tempo di loro origine, ma aggruppati a norma dell'argomento e delle idee che loro servono di base.

(*Continua*)

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

SOPRA LA PROPAGAZIONE DELLE ONDE PIANE DI UN GAZ.

(Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite von B. Riemann B. VIII der Abh. der K. G. der W. zu Göttingen).

L'equazioni del movimento di un gaz, quando la velocità u nel senso dell' asse delle x e la densità ρ siano eguali in tutti i punti di ciascuno dei piani paralleli al piano $y\ z$ e non vi sia azione di forze esterne, sono, come è noto:

$$\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}\,;\ \frac{d\rho}{dt}+\frac{d\rho u}{dx}=0\,.$$

Indichiamo con $\varphi(\rho)$ la funzione della densità che esprime la pressione p. Il valore di $\varphi(\rho)$ sarà sempre positivo, aumenterà coll'aumentare di ρ, e la sua derivata non decrescerà quando ρ aumenta. Del resto non facciamo alcuna ipotesi sopra la espressione analitica di questa funzione.

Avremo:

$$(1)\qquad \frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}=-\varphi'(\rho)\frac{d\log\rho}{dx}\,,$$

$$(2)\qquad \frac{d\log\rho}{dt}+u\frac{d\log\rho}{dx}=-\frac{du}{dx}\cdot$$

Moltiplichiamo la equazione (2) per $\pm\sqrt{\varphi'(\rho)}$ e sommiamola colla equazione (1). Ponendo:

$$(3)\qquad f(\rho)=\int\sqrt{\varphi'(\rho)}\,d\log\rho\,,$$

$$(4)\qquad 2r=f(\rho)+u\,,\qquad 2s=f(\rho)-u\,,$$

si otterrà:

$$(5)\qquad \frac{dr}{dt}=-\left(u+\sqrt{\varphi'(\rho)}\right)\frac{dr}{dx},\ \frac{ds}{dt}=-\left(u-\sqrt{\varphi'(\rho)}\right)\frac{ds}{dx}\,;$$

onde:

$$(6)\qquad dr=\frac{dr}{dx}\left(dx-[u+\sqrt{\varphi'(\rho)}]dt\right),$$

$$(7)\qquad ds=\frac{ds}{dx}\left(dx-[u-\sqrt{\varphi'(\rho)}]dt\right)\cdot$$

Da queste formule si deduce che muovendosi nel senso delle x positive colla velocità $\frac{dx}{dt} = u + \sqrt{\varphi'(\rho)}$, ci troveremo sempre sopra punti nei quali r ossia $u + f(\rho)$ ha lo stesso valore, e che muovendosi nel senso delle x negative colla velocità $-\frac{dx}{dt} = \sqrt{\varphi'(\rho)} - u$, ci troveremo sempre sopra punti nei quali s o $f(\rho) - u$ ha lo stesso valore. Quindi prendendo due valori che r ed s hanno in un medesimo tempo in due punti differenti, vi sarà un punto in cui dopo un certo tempo r ed s avranno questi medesimi valori. Per trovare dove e quando r avrà un dato valore r' ed s un dato valore s', bisognerà determinare x e t in funzione di r ed s.

Le equazioni (6) e (7), a cagione dell'equazioni (4), che danno:

$$du = dr - ds\,, \quad dr + ds = \sqrt{\varphi'(\rho)}\, d\log\rho\,,$$

si possono porre sotto la forma:

$$(8) \qquad dr = \frac{dr}{dx}\left\{d\left(x - t[u + \sqrt{\varphi'(\rho)}]\right) + t\left[dr\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\rho)}}{d\log\rho} + 1\right) + ds\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\rho)}}{d\log\rho} - 1\right)\right]\right\},$$

$$(9) \qquad ds = \frac{ds}{dx}\left\{d\left(x - t[u - \sqrt{\varphi'(\rho)}]\right) + t\left[ds\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\rho)}}{d\log\rho} + 1\right) - dr\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\rho)}}{d\log\rho} - 1\right)\right]\right\};$$

onde:

$$(10) \qquad \frac{d[x - (u + \sqrt{\varphi'(\rho)})t]}{ds} = -t\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\rho)}}{d\log\rho} - 1\right),$$

$$(11) \qquad \frac{d[x + (u - \sqrt{\varphi'(\rho)})t]}{dr} = t\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\rho)}}{d\log\rho} - 1\right).$$

In conseguenza la espressione:

$$(12) \qquad \left(x - [u + \sqrt{\varphi'(\rho)}]t\right)dr - \left(x - [u - \sqrt{\varphi'(\rho)}]t\right)ds$$

sarà un differenziale esatto di una funzione w, la quale sodisfarà all'equazione:

$$\frac{d^2w}{dr\,ds} = -t\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\rho)}}{d\log\rho} - 1\right) = m\left(\frac{dw}{dr} + \frac{dw}{ds}\right),$$

dove:

$$m = \frac{1}{2\sqrt{\varphi'(\rho)}}\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\rho)}}{d\log\rho} - 1\right),$$

e ponendo $\sigma = f(\rho) = r + s$:

$$(13) \qquad m = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\log\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\sigma}}{\mathrm{d}\sigma}.$$

L'introduzione di r ed s come variabili indipendenti è soltanto possibile quando il determinante funzionale:

$$\begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} & \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} & \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}, & -[u + \sqrt{\varphi'(\rho)}]\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}, & -[u - \sqrt{\varphi'(\rho)}]\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} \end{vmatrix} = 2\sqrt{\varphi'(\rho)}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}$$

è differente da zero.

Ma se $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = 0$, dalla equazione (6) abbiamo $\mathrm{d}r = 0$, e quindi $x - [u - \sqrt{\varphi'(\rho)}\,]t$ è funzione della sola s, e l'espressione (12) è un differenziale esatto, e w è funzione della sola s.

Se $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = 0$ abbiamo analogamente che $x - t[u + \sqrt{\varphi'(\rho)}\,]$ e w sono funzioni della sola r.

Finalmente se $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = 0$, r, s e w sono costanti.

Quando avremo integrata l'equazione:

$$(14) \qquad \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s} - m\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}\right) = 0,$$

in modo da sodisfare alle condizioni iniziali del movimento, dall'equazioni:

$$(15) \qquad x - t[u + \sqrt{\varphi'(\rho)}\,] = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r},$$

$$(16) \qquad x - t[u - \sqrt{\varphi'(\rho)}\,] = -\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}$$

avremo x e t in funzione di r ed s, o anche per mezzo dell'equazioni (4), u e ρ in funzioni di x e t.

Ma se r al principio del movimento in un tratto finito dell'asse delle x ha uno stesso valore r', r avrà il valore costante r' in tratti finiti del medesimo asse sempre più avanti nel senso positivo. Poichè in questi tratti $\mathrm{d}r = 0$, non si potrà determinare il valore di $x - t[u + \sqrt{\varphi'(\rho)}\,]$, e quindi non si potranno esprimere x e t in funzione di r e di s, ossia non si potrà determinare dove e quando è $r = r'$ ed s ha un dato valore, problema che si vede a priori essere indeterminato. Ma però

agli estremi del tratto di asse delle x in cui $r = r'$ vale l'equazione (4), quindi si potrà determinare tra quali valori di x dopo un dato tempo saranno compresi i punti nei quali $r = r'$, oppure per quanto tempo si ha $r = r'$ in un dato punto. Analoghe considerazioni possono farsi per il caso in cui sia r variabile, ed $s = s'$, o $r = r'$ e $s = s'$ in un tratto finito dell'asse delle x.

Supponiamo che al principio del movimento sia disturbato l'equilibrio del gaz soltanto nella porzione di spazio compresa tra $x = a$ e $x = b$, in guisa che per valori maggiori di b o minori di a, u e ρ e quindi anche r ed s siano costanti, e distinguiamo coll' indice 1 i valori di queste quantità per $x \leq a$, e coll' indice 2, quelli corrispondenti a $x \geq b$. La porzione di spazio in cui r è variabile si muove nel senso delle x positive, e il suo limite inferiore si muove colle velocità

$$u_1 + \sqrt{\varphi(\rho_1)},$$

mentre il limite superiore dello spazio in cui s è variabile si muove nel senso delle x negative colla velocità

$$\sqrt{\varphi'(\rho_2)} - u_2.$$

Onde dopo il tempo

$$\theta = \frac{b - a}{\sqrt{\varphi(\rho_1)} + \sqrt{\varphi(\rho_2)} + u_1 - u_2},$$

in tutto lo spazio compreso tra $x = a$ e $x = b$, si avrà $r = r_1$ ed $s = s_2$, ossia il gaz in questo spazio sarà tornato in equilibrio, e dal medesimo si saranno propagate due onde in direzioni opposte. Quella che si muove nel senso delle x positive, nella quale $s = s_2$ e quindi $u = \gamma(\rho) - 2s_2$, avanzerà colla velocità

$$\sqrt{\varphi'(\rho)} + f(\rho) - 2s_2,$$

quella che si muoverà nel senso delle x negative, nella quale $r = r_1$, e quindi

$$u = -f(\rho) + 2r_1$$

procederà colla velocità

$$\sqrt{\varphi'(\rho)} + f(\rho) - 2r_1.$$

La velocità di propagazione delle onde cresce colla densità ρ, poichè $\varphi'(\rho)$ e $f(\rho)$ crescono con ρ.

Se in un piano condotto per l'asse delle x inalziamo per ogni punto di questo asse una ordinata proporzionale alla densità ρ del gaz in quel punto, dopo il tempo θ l'estremità dell'ordinate corrispondenti a un certo tratto dell' asse delle x al di là del punto in cui $x = b$, e al di qua del punto in cui $x = a$, formeranno due linee curve, e per avere le densità nei tempi successivi bisognerà far partire da ciascuno dei punti della prima curva un punto che si muova paralellamente all' asse delle x nel senso delle x positive con velocità tanto maggiore; quanto maggiore è la ordinata,

uno da ciascuno dei punti della seconda curva che si muova nel senso negativo parallellamente all' asse delle x, con velocità tanto più grande quanto è più grande la sua ordinata. Fermandoli dopo un dato tempo avremo la curva delle densità corrispondente a quel tempo. Ma se un punto ha l'ordinata maggiore di uno che gli sia avanti, muovendosi con maggior velocità dopo un certo tempo lo raggiungerà, e avremo in un medesimo punto due valori differenti per la densità, ossia una variazione brusca di densità, ed essendo in questo punto u e ρ, e quindi r ed s discontinue non si potranno applicare l'equazioni (4). Quando vi sono queste discontinuità $\frac{dr}{dx}$ o $\frac{dr}{dx}$ devono divenire infinite, e quindi deve aversi, come risulta dall'equazioni (8) e (9):

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = -\, t\left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} + 1\right),$$

$$\frac{d^2 w}{ds^2} = t\left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} + 1\right).$$

Per determinare il movimento del gaz dopo che sono comparse discontinuità, occorrono considerazioni particolari. Consideriamolo soltanto per tutto il tempo e lo spazio nei quali non si presentano discontinuità.

I valori di x e di t per i quali sono $r=r'$ ed $s=s'$, saranno compiutamente determinati quando si conoscano i valori iniziali di r e di s nella porzione di asse delle x compresa tra il punto in cui al principio è $r=r'$, e quello in cui al principio è $s=s'$, purchè siano sodisfatte l'equazioni differenziali (5) per tutta l'estensione dell' asse delle x che in ogni tempo abbraccia i punti compresi tra quello in cui $r=r'$, ed $s=s'$. Per tanto il valore di w sarà compiutamente determinato se in questa estensione sarà sodisfatta l'equazione (14) e saranno dati i valori iniziali di $\frac{dw}{dr}$ e $\frac{dw}{ds}$ nella porzione di spazio compresa tra $x=a$ e $x=b$.

Rappresentiamo con t le ordinate e con x le ascisse dei punti di un Piano, indichiamo con (r) le curve che così avremo per i punti nei quali r è costante, e con (s) quelle nelle quali s è costante, e in queste consideriamo come positiva la direzione nella quale cresce t. L'equazione (14) dovrà essere soddisfatta in tutta la estensione S del piano che è compresa tra l'asse delle x, la curva (r'), e la curva (s'), e saranno dati sopra l'asse delle x i valori di $\frac{dw}{dr}$ e di $\frac{dw}{ds}$, e si dovrà determinare il valore di w corrispondente all'intersezione delle curve (r') ed (s'). Dando maggior generalità al nostro problema, supporremo che lo spazio S invece di esser limitato inferiormente dall'asse delle x, sia limitato da una linea c che non interseca più di una volta le curve (r') ed (s'), e siano dati i valori di $\frac{dw}{dr}$ e $\frac{dw}{ds}$ sopra questa linea.

Immaginiamo la porzione di piano S divisa dalle curve (r) ed (s) in parallelogrammi infinitamente piccoli, e indichiamo con ∂r e ∂s le variazioni che soffrono r ed s quando si percorrono nel senso positivo gli elementi di curva che formano i lati di questi parallelogrammi, e sia v una funzione per tutto continua, e con derivate continue, avremo:

$$\iint v\left[\frac{d^2 w}{dr\, ds} - m\left(\frac{dw}{dr} + \frac{dw}{ds}\right)\right]\partial r\, \partial s = 0$$

quando l'integrale si estenda a tutta la superficie S.

Con due integrazioni successive per parti questa equazione si trasforma nella seguente:

$$-\int\left[v\left(\frac{dw}{ds} - mw\right)ds + w\left(\frac{dv}{dr} + mv\right)dr\right]$$

$$+\iint w\left(\frac{d^2 v}{dr\, ds} + \frac{dmv}{dr} + \frac{dmv}{ds}\right)\partial r\, \partial s = 0$$

dove il primo integrale deve estendersi a tutto il contorno dell'area S, il secondo a tutta l'area S. Indicando con (c, r'), (c, s'), (r', s') i punti d'intersezione delle curve c ed (r'), c ed (s'), (r') ed (s'), e osservando che sopra la curva (r') si ha $dr = 0$, e sopra la curva (s') si ha $ds = 0$,
si ottiene:

$$-\int_{(c,s')}^{(c,r')}\left\{v\left(\frac{dw}{ds} - mw\right)ds + w\left(\frac{dv}{dr} + mv\right)dr\right\} - \int_{(c,r')}^{(r',s')} v\left(\frac{dw}{ds} - mw\right)ds$$

$$-\int_{(r',s')}^{(c,s')} w\left(\frac{dv}{dr} + mv\right)dr + \iint w\left(\frac{d^2 v}{dr\, ds} + \frac{dmv}{dr} + \frac{dmv}{ds}\right)\partial r\, \partial s = 0$$

e con un integrazione per parti effettuate sopra il secondo integrale:

$$(vw)_{(c,r')} - (vw)_{(r',s')} - \int_{(c,s')}^{(c,r')}\left\{v\left(\frac{dw}{ds} - mw\right)ds + w\left(\frac{dv}{dr} + mv\right)dr\right\}$$

$$+\int_{(c,r')}^{(r',s')} w\left(\frac{dv}{ds} + mv\right)ds - \int_{(r',s')}^{(c,s')} w\left(\frac{dv}{dr} + mv\right)dr + \iint w\left(\frac{d^2 v}{dr\, ds} + \frac{dmv}{dr} + \frac{dmv}{ds}\right)\partial r\, \partial s = 0.$$

Ora se prendiamo la funzione v in modo che soddisfaccia alle seguenti condizioni:

$$(a) \qquad \frac{d^2 v}{dr\, ds} + \frac{dmv}{dr} + \frac{dmv}{ds} = 0 \quad \text{in tutta l'area S,}$$

$$(b) \qquad \frac{dv}{ds} + mv = 0 \quad \text{per } r = r',$$

$$(c) \qquad \frac{dv}{dr} + mv = 0 \quad \text{per } s = s',$$

$$(d) \qquad v = 1 \quad \text{per } r = r' \text{ ed } s = s'$$

abbiamo:

$$(17) \qquad w_{r',s'} = (vw)_{(c,r')} + \int_{(c,r')}^{(c,s')} \left\{ v\left(\frac{dw}{ds} - mw\right)ds + w\left(\frac{dv}{dr} + mv\right)dr \right\}$$

e quindi il valore di w nel punto (r', s') espresso per la funzione v, e per i valori di w e delle sue derivate sopra la curva c.

Per determinare v, poniamo $v = e^{-\int_{\sigma'}^{\sigma} m d\sigma} y$; la equazione (a) darà:

$$(4) \qquad \frac{d^2 y}{dr\, ds} + \left(\frac{dm}{d\sigma} - m^2\right) y = 0$$

la equazione (c) dà $\frac{dy}{dr} = 0$ per $s = s'$, la equazione (b) dà $\frac{dy}{ds} = 0$ per $r = r'$, la equazione (d) dà $y = 1$ per $r = r'$ e $s = s'$; onde $y = 1$ tanto per $r = r'$ quanto per $s = s'$.

La determinazione di y è molto semplice quando si supponga $m = \frac{l}{\sigma}$, poichè allora si sodisfa l'equazione (4) e le condizioni ai limiti, prendendo

$$z = -\frac{(r - r')(s - s')}{(r + r')(s + s')} \quad \text{e} \quad y = f(r),$$

essendo la funzione $f(r)$ l'integrale dell'equazione:

$$(1 - z)\frac{d^2 y}{d \log z^2} - z \frac{dy}{d \log z} + (\lambda + \lambda^2) z y = 0,$$

che è eguale ad 1 per $z = 0$, il quale si esprime come è noto per serie ipergeometriche o per integrali definiti.

Poichè sono date immediatamente sopra la curva c soltanto $\frac{dw}{dr}$ e $\frac{dw}{ds}$, e la fun-

zione w sopra la medesima bisognerebbe ottenerla mediante una quadratura, conviene trasformare l'espressione di $w_{r',s'}$ in modo che sotto il segno d'integrazione compariscano soltanto i valori di $\frac{dw}{dr}$ e di $\frac{dw}{ds}$.

A cagione della equazione (a) l'espressioni

$$-mv\,ds+\left(\frac{dv}{dr}+mv\right)dr, \quad e \quad -mv\,dr+\left(\frac{dv}{ds}+mv\right)ds$$

sono differenziali esatti. Indichiamo con P e Q i loro integrali. Avremo:

$$\frac{dP}{ds}=-mv=\frac{dQ}{dr},$$

onde anche $Pdr+Qds$ sarà un differenziale esatto, il cui integrale indicheremo con ω. Prendiamo le costanti delle integrazioni in modo che P, Q ed ω siano eguali a zero per $r=r'$ ed $s=s'$. Così ω sarà compiutamente determinato quando sarà determinata la funzione v.

Sommando i due valori di dP e di dQ, abbiamo:

$$dP+dQ=dv,$$

onde:

$$P+Q=v+\text{cost}.$$

ed a cagione della condizione (d): $\text{cost}=-1$, e quindi:

$$P+Q+1=v,$$

ossia:

$$(18) \qquad \frac{d\omega}{dr}+\frac{d\omega}{ds}+1=v.$$

Abbiamo inoltre:

$$\frac{dP}{ds}=\frac{d^2\omega}{dr\,ds}=-mv$$

onde:

$$(e) \qquad \frac{d^2\omega}{dr\,ds}+m\left(\frac{d\omega}{dr}+\frac{d\omega}{ds}+1\right)=0.$$

Poichè a cagione della condizione (c):

$$\frac{dP}{dr}=\frac{dv}{dr}+mv=0 \quad \text{per } s=s',$$

$P=\frac{d\omega}{dr}$, che è eguale a zero nel punto (r',s') della curva (s'), sarà eguale a zero sopra tutta questa curva, anche ω che è eguale a zero nel punto (r',s') sarà nullo

sopra tutta la curva (s'). Analogamente si dimostra che ω sarà nullo sopra tutta la curva (r').

La equazione (e) e le condizioni ai limiti:

$$(f) \qquad \omega = 0 \quad \text{per} \quad r = r',$$

$$(g) \qquad \omega = 0 \quad \text{per} \quad s = s'$$

saranno sufficienti alla determinazione di ω.

Osservando che, colla sostituzione del valore di v dato dalla equazione (18), si ha:

$$(vw)_{c,r'} = w_{c,r'} + \left(w\frac{d\omega}{dr}\right)_{c,r'} + \left(w\frac{d\omega}{ds}\right)_{c,r'} = w_{c,r'} + \left(w\frac{d\omega}{dr}\right)_{c,r'}$$

$$\int_{c,r'}^{c,s'} v\left(\frac{dw}{ds} - mw\right)ds = \int_{c,r'}^{c,s'}\left\{\frac{dw}{ds}\left(1 + \frac{d\omega}{dr} + \frac{d\omega}{ds}\right) + w\frac{d^2\omega}{dr\,ds}\right\}ds = -\left(w\frac{d\omega}{dr}\right)_{c,r'}$$

$$+ \int_{c,r'}^{c,s'}\frac{dw}{ds}\left(1 + \frac{d\omega}{ds}\right)ds, \quad \int_{c,r'}^{c,s'} w\left(\frac{dv}{dr} + mv\right)dr = \int_{c,r'}^{c,s'} w\frac{d^2\omega}{dr^2}\,dr = -\int_{c,r'}^{c,s'}\frac{d\omega}{dr}\,\frac{dw}{dr}dr,$$

l'equazione (17) si trasforma nella seguente:

$$(19) \qquad w_{r',s'} = w_{c,r'} + \int_{c,r'}^{c,s'}\frac{dw}{ds}\left(1 + \frac{d\omega}{ds}\right)ds - \int_{c,r'}^{c' s'}\frac{dw}{dr}\,\frac{d\omega}{dr}\,dr.$$

Così la determinazione di w in modo che sodisfaccia l'equazione (14), quando sono dati i valori delle $\frac{dw}{dr}$ e $\frac{dw}{ds}$ al principio del movimento, o più generalmente sopra una curva c, è ridotta alla risoluzione del problema più semplice di determinare una funzione v in modo che sieno sodisfatte le condizioni (a), (b), (c), (d), oppure una funzione ω in modo che siano sodisfatte le condizioni (e), (f) e (g).

Quando $\frac{dw}{dv}$ e $\frac{dw}{ds}$ sono date al principio del movimento, la curva c si riduce all'asse delle x, e abbiamo dall'equazioni (15) e (16) $\frac{dw}{dr} = x$, $\frac{dw}{ds} = -x$, e quindi l'equazione (14) diviene:

$$w_{r',s'} = w_{c,r'} + \int_{c,r'}^{c,r'}(\omega\,dx - x\,ds)$$

quindi:

$$\left(x - t\left(u + \sqrt{\varphi'(\rho)}\right)\right)_{r', s'} = x_{r'} + \int_{x_{r'}}^{x_{s'}} \frac{d\omega}{dr'} dx ,$$

$$\left(x - t(u - \sqrt{\varphi'(\rho)}\right)_{r', s'} = x_{s'} - \int_{x_{r'}}^{x_{s'}} \frac{d\omega}{ds'} dx .$$

SULLE SUPERFICIE DI SECOND' ORDINE OMOFOCALI.

CHASLES. RÉSUMÉ D'UNE THÉORIE DES SURFACES DU SECOND ORDRE HOMOFOCALES.
COMPTES RENDUS, 1860, N.° 24 et 25.



In una memoria inserita in questi *Annali di matematica* (marzo ed aprile 1859), io ho studiato la distribuzione de'centri d'un sistema di superficie di second'ordine, inscritte in una stessa sviluppabile (reale o immaginaria) ed aventi il comune tetraedro polare *reale.* Ivi ho dimostrato che le quattro coniche, linee di stringimento della sviluppabile, o son tutte reali, ovvero due sono reali e due immaginarie.

Assumo tre de'quattro piani costituenti il tetraedro polare, come piani coordinati, e suppongo che il quarto piano sia tutto a distanza infinita. Siano $t : u : v : w$ le coordinate tangenziali (di Plücker) di un piano qualsivoglia, cioè siano

$$-\frac{w}{t}, \quad -\frac{w}{u}, \quad -\frac{w}{v}$$

i segmenti da esso determinati sugli assi. Allora, come risulta dalla citata memoria, una superficie qualunque del sistema sarà rappresentabile coll'equazione:

$$(1) \quad (b - c + i\alpha)t^2 + (c - a + i\beta)u^2 + (a - b + i\gamma)v^2 + (\alpha + \beta + \gamma)w^2 = 0$$

ove i è il parametro variabile che serve ad individuare ciascuna superficie del sistema, ed a, b, c, α, β, γ sono quantità costanti legate fra loro dall'unica condizione:

$$(2) \qquad a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 .$$

Ponendo nella (1) successivamente $i = \infty, \ \frac{c-b}{\alpha}, \ \frac{a-c}{\beta}, \ \frac{b-a}{\gamma}$ si ottengono le quattro coniche di stringimento:

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{rrrrl} \alpha t^2 & +\beta u^2 & +\gamma v^2 & * & =0 \\ * & cu^2 & -bv^2 & +\alpha w^2 & =0 \\ -ct^2 & * & +av^2 & +\beta w^2 & =0 \\ bt^2 & -au^2 & * & +\gamma w^2 & =0 \end{array} \right.$$

la prima delle quali è tutta all'infinito.

La forma dell'equazione (1) mostra che tutte le superficie del sistema hanno il centro all'origine, e che per esse i piani coordinati costituiscono una comune terna di piani diametrali coniugati.

Si supponga la prima conica immaginaria cioè α, β, γ abbiano lo stesso segno, ed invero, com'è lecito supporre, positivo. In virtù della (2), le a, b, c non potranno esser tutte positive, nè tutte negative; perciò, delle altre tre coniche, una è immaginaria e le altre due sono reali ma di specie diversa: un'ellisse ed un'iperbole.

Esprimiamo ora le condizioni che la prima conica sia circolare. La sfera di raggio $=1$ e col centro all'origine è rappresentata dall'equazione:

$$t^2\text{sen}^2\lambda + u^2\text{sen}^2\mu + v^2\text{sen}^2\nu - 2uv\,(\cos\lambda - \cos\mu\cos\nu) - 2vt\,(\cos\mu - \cos\nu\cos\lambda)$$
$$- 2tu(\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu) = w^2(1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu),$$

ove λ, μ, ν sono gli angoli fra gli assi coordinati. Ora, il cerchio immaginario all'infinito è la linea dell'ideale contatto fra la sfera ed il suo cono assintotico; onde, facendo $w=0$ nell'equazione precedente, avremo l'equazione del cerchio immaginario richiesto.

Affinchè l'equazione risultante coincida colla prima delle (3) dev'essere:

$$\cos\lambda = \cos\mu = \cos\nu = 0,$$

cioè i piani diametrali comuni alle superficie (1) devono essere i loro piani principali; ed inoltre:

$$\alpha = \beta = \gamma.$$

Posto, com'è lecito, $\alpha = 1$, l'equazione (1) diviene:

$$(b - c + i)t^2 + (c - a + i)u^2 + (a - b + i)v^2 + 3w^2 = 0.$$

I quadrati de'semiassi di questa superficie sono:

$$\frac{c - b - i}{3},\quad \frac{a - c - i}{3},\quad \frac{b - a - i}{3};$$

quindi le superficie inscritte in una sviluppabile (immaginaria) per la quale il cerchio immaginario all'infinito sia una linea di stringimento, sono omofocali. E reciprocamente, le superficie omofocali si ponno risguardare come inscritte in una sviluppabile immaginaria tagliata dal piano all' infinito secondo il cerchio immaginario, cioè secondo la linea di contatto fra una sfera arbitraria ed il suo cono assintotico.

Di qui segue che se $U = 0$ è l'equazione, in coordinate tangenziali, di una superficie di second'ordine, riferita ad assi qualsivogliano, l'equazione generale delle superficie omofocali ad essa sarà :

$$U + iS = 0$$

ove :

$$S = t^2 \mathrm{sen}^2\lambda + u^2 \mathrm{sen}^2\mu + v^2 \mathrm{sen}^2\nu - 2uv(\cos\lambda - \cos\mu \cos\nu)$$
$$- 2vt(\cos\mu - \cos\nu \cos\lambda) - 2tu(\cos\nu - \cos\lambda \cos\mu)$$

(λ, μ, ν angoli fra gli assi).

Questo risultato analitico, esprimente il suenunciato teorema sulle superficie omofocali, teorema che è stato dato la prima volta dall'illustre Chasles nel suo *Aperçu historique* (Nota 31ª), ci pone in grado di dare semplicissime dimostrazioni de'quattro teoremi generali recentemente dati dal medesimo autore nei *Comptes rendus* (11 giugno 1860), come fondamento di una teoria delle superficie medesime.

Sia :

$$A = F + iS, \quad A' = F + i' S,$$
$$B = A + \theta U, \quad B' = A' + \theta' U;$$

ne segue:

$$\theta' B - \theta B' = (\theta' - \theta)F + (\theta' i - \theta i')S,$$

e :

$$B - B' = (\theta - \theta')U + (i - i')S$$

cioè :

« Date due superficie omofocali A, A' ed un'altra superficie qualunque U, se nelle due sviluppabili (UA), (UA') si inscrivono rispettivamente due superficie qualsivogliano B, B'; la sviluppabile (BB') sarà simultaneamente circoscritta ad una superficie omofocale ad A, A' e ad un'altra superficie omofocale ad U. »

Posto :

$$A' = A + \theta S, \qquad B = A + \omega U,$$

si ha :

$$A' + \omega U = B + \theta S;$$

dunque :

« Date due superficie omofocali A, A' ed una terza superficie qualunque U, se nella sviluppabile (UA) s'inscrive una superficie B; si potrà nella sviluppabile (UA') inscrivere una superficie omofocale a B. »

Posto :

$$A' = A + \theta' S, \qquad A'' = A + \theta'' S,$$
$$B' = A' + \omega' U, \qquad B'' = A'' + \omega'' U,$$

*

si ricava:

$$\theta'' B' - \theta' B'' = (\theta'' - \theta')A + (\theta''\omega' - \theta'\omega'')U\,;$$

dunque:

« Date tre superficie omofocali A, A', A'' ed una quarta superficie qualunque U, se nelle sviluppabili (UA'), (UA'') si inscrivono rispettivamente le superficie B', B''; le due sviluppabili (B' B''), (UA) saranno circoscritte ad una stessa superficie (di second'ordine). »

Ponendo:

$$A = U + aV, \quad B = U + bV, \quad C = U + cV,$$
$$A' = A + a'S, \quad B' = B + b'S,$$

avremo:

$$(c - b)A' + (a - c)B' = (a - b)C + [\, a'(c - b) + b'(a - c)\,]S$$

ed inoltre:

$$b'A' - a'B' = b'A - a'B\,;$$

dunque:

« Quando tre superficie A, B, C sono inscritte in una stessa sviluppabile, se si descrivono due superficie A', B' omofocali rispettivamente ad A e B, si potrà inscrivere nella sviluppabile (A'B') una superficie C' omofocale a C. E le due sviluppabili (ABC), (A'B'C') saranno circoscritte ad una stessa superficie (di second'ordine). »

Bologna, 1° dicembre 1860.

L. Cremona.



Lezioni di Meccanica razionale di O. F. Mossotti. La Statica dei sistemi di forma invariabile di F. Brioschi, Milano 1859. Elementi di Meccanica razionale di D. Chelini delle Scuole Pie, Bologna 1860.

Gli Elementi di Meccanica del Venturoli, che per molto tempo sono stati adottati quasi esclusivamente nelle scuole italiane, per unanime consenso di tutti coloro che coltivano queste dottrine non potevano più utilmente essere adoperati nell' insegnamento. Quindi i nuovi trattati, che han dato occasione al presente articolo, saranno accolti con generale soddisfazione, come quelli che adempiendo a un desiderio di molti anni, meglio rispondono ai bisogni attuali della scolaresca e allo stato presente della scienza. Gli autori di queste Opere sono per varii titoli già noti all' Italia; il Prof. Mossotti per profondi lavori sulla Fisica matematica, che lo hanno collocato fra i più eminenti cultori di questa scienza; il Prof. Chelini per pregevoli memorie sulla Geometria analitica; il Prof. Brioschi come uno fra i più abili analisti dei tempi attuali. E noi dobbiamo saper grado a questi distinti Professori, se tralasciando per poco studii più fruttuosi di lode, hanno voluto consentire alla redazione di opere destinate all'insegnamento, alle quali d'ordinario procurano poca soddisfazione di amor proprio.

Chiunque si fa a scrivere un Trattato di Meccanica razionale deve proporsi e risolvere una quistione fondamentale : la Statica deve precedere o seguire la Dinamica ? Le leggi dell'equilibrio vogliono essere considerate indipendentemente da qualunque nozione di moto e come un capitolo di analisi , ovvero debbono trarre la loro origine da quelle del movimento ? Venti anni sono la generalità degli scrittori di Meccanica non si preoccupava di tale indagine , comunque già fosse sorta una scuola , che aveva a capi Coriolis e Poncelet, la quale non approvava l'indirizzo dato sin'allora all'insegnamento di questa scienza. Ma negli ultimi anni la quistione venne posta officialmente in un celebre rapporto redatto dal Sig. Leverrier, che promosse la riunione di una Commissione, la quale si mostrò favorevole alle nuove idee, e modificò radicalmente tutto l'insegnamento delle matematiche in Francia. Per ciò che riguarda la Meccanica , i fautori della riforma subordinano più o meno la Statica alla Dinamica; e taluni vanno fino a considerare la prima come caso particolare della seconda.

I Sigg. Brioschi e Chelini non hanno creduto che in queste opinioni vi fosse qualche cosa di ragionevole, e quindi il primo ci ha dato una dimostrazione puramente analitica, e il secondo geometrica della composizione delle forze. Il Prof. Mossotti si è collocato fra le due opinioni estreme, e secondo il nostro parere ha rag-

giunto il vero. L'egregio Professore non ha voluto considerare la Statica come una parte della Dinamica, ma al tempo stesso ha ben veduto che non si poteva fare a meno di premettere talune nozioni sul moto prima di entrare a parlare dell'equilibrio. Questi preliminari non solamente gli hanno dato opportunità di fondare sulle sue vere basi la composizione delle forze, deducendola da quella dei movimenti di traslazione, ma altresì gli hanno permesso di trattare nella prima parte, che s'intitola: *Del moto, delle forze, e dell'equivalenza dei loro sistemi,* tutta la teoria della composizione e decomposizione delle forze e delle coppie, la quale, a rigor di termini, non appartiene alla Statica. In questa prima parte l'Autore ha dato come applicazione della composizione delle forze che agiscono sopra un punto, la ricerca delle attrazioni che esercitano sopra una molecola quelle che compongono un corpo.

La Statica comprende due specie di problemi, quelli relativi all'equilibrio dei sistemi di forma invariabile, e quelli che si riferiscono all'equilibrio dei sistemi di forma variabile. Occupandoci per ora della prima parte, cominceremo dall'esaminare l'opuscolo del Sig. Brioschi, che non va al di là di questi limiti. Il valente Geometra trattando delle proprietà delle coppie risultanti aggiunge nuovi teoremi a quelli che si trovano nei trattati ordinarii. Fra questi teoremi citeremo i seguenti.

1.° I piani delle coppie risultanti corrispondenti a punti situati in un piano di coppia risultante passano tutti pel punto a cui corrisponde quella coppia; e reciprocamente, i punti corrispondenti a coppie risultanti i cui piani si segano in uno stesso punto, sono situati nel piano della coppia corrispondente a quel punto. — Questo teorema è dovuto al Sig. Möbius.

2.° Il luogo geometrico dei punti corrispondenti alle coppie risultanti i piani delle quali passano per una medesima retta è un'altra retta; e reciprocamente i piani delle coppie risultanti corrispondenti a punti situati in una retta data passano per un'altra retta data. Queste due rette, che godono della proprietà che una di esse contiene i punti corrispondenti alle coppie risultanti i piani delli quali passano per l'altra, sono state chiamate dal Sig. Möbius *rette reciproche.*

3.° Date due rette reciproche, se una di esse è asse di coppia risultante, lo è altresì l'altra; ed allora queste due rette sono ortogonali fra di loro.

4.° I momenti di due coppie risultanti corrispondenti a due punti qualunque, stanno fra loro come la distanza di questi punti alla retta reciproca a quella che unisce i punti stessi.

5.° Due rette reciproche sono perpendicolari ad una linea che incontra ad angolo retto l'asse centrale.

6.° Le due forze che possono sempre rimpiazzare un dato sistema di forze, agiscono secondo due linee reciproche.

I teoremi 3.°, 4.°, 5.° 6.° appartengono al Sig. Schweins.

Dopo questi teoremi l'Autore dimostra varie relazioni fra i momenti delle coppie risultanti e componenti. Nel Capitolo 7.° espone i principali teoremi sul *centro delle forze*, argomento di cui si sono occupati varii geometri, fra i quali i Sigg. Möbius, Minding, Schweins e Steichen. Negli ultimi due capitoli (8.° 9.°) dà le condizioni di equilibrio di un punto e di un sistema di forma invariabile. In questa seconda parte parla dell'*asse di equilibrio*, ovvero della retta intorno alla quale si deve far rotare un sistema in equilibrio, affinchè nel passaggio dalla prima ad una seconda posizione l'equilibrio non venga meno.

Da questi brevi cenni apparisce chiaro che l' opuscolo del Prof. Brioschi è un trattato di Statica dei sistemi di forma invariabile che esce dalla rotaia nella quale con mirabile costanza suole trascinarsi la maggior parte degli scrittori di opere deputate all'insegnamento. E noi stimiamo meritevoli di gran lode quelle opere, le quali, comunque elementari, pur riflettono per così dire, con criterio e misura, i progressi della scienza. Quindi noi terminiamo pregando il distinto Geometra di Pavia a voler pubblicare altresì le altre parti delle Lezioni di Meccanica che per varii anni ha svolte nell'Università di Pavia, persuasi che questa pubblicazione gioverebbe potentemente alla causa dei buoni e forti studii, della quale lo sappiamo caldo difensore.

Nella Statica del Sig. Chelini abbiamo trovato ordine, e chiarezza, doti che siamo abituati a riscontrare in tutti i lavori dell'egregio Professore; le varie dottrine sono esposte coi metodi ordinarii, e dei problemi più difficili, quali l'equilibrio delle superficie e quello del filo elastico, sono considerati i casi più elementari.

Il Sig. Mossotti dopo aver date le condizioni di equilibrio per un punto e per un sistema di forma invariabile, tratta del problema, che ha tanto occupato i Geometri, di determinare le pressioni che produce un corpo appoggiato sopra un altro in più punti. Facendo capo al principio dalle velocità virtuali e al dato sperimentale sul quale riposa la teorica della resistenza dei solidi, che suole esporsi nei trattati di Meccanica applicata, riesce al teorema già dato da Cournot, cioè che la somma dei quadrati di tutte le resistenze deve essere un minimo. Questo teorema è poi dall' Autore applicato alla ricerca delle pressioni sui due cardini di una porta, di quelle che esercita un corpo sopra un piano al quale si appoggi con uno, due, tre, punti, e in generale con uno spigolo. La Statica dei sistemi di forma variabile è una delle parti più felicemente trattate dall' Autore; il quale applica il noto principio che riduce la ricerca delle condizioni di equilibrio di questi sistemi a quelli rigidi, con metodo uniforme, e generale al poligono e alla curva funicolare, alle superficie flessibili ed inestensibili e al filo elastico. Questa maniera di procedere ci sembra pregevolissima, e la leggera complicazione che ne risulta è largamente compensata dalla perfetta simmetria delle formole e della squisita eleganza dei calcoli. E a questo proposito diremo che il Prof. Mossotti ha dato nella sua Meccanica luminosi esempii della verità delle note

parole di Laplace, *preferite nell'insegnamento i metodi generali* ec.; le quali dovrebbono essere profondamente scolpite nell'animo di coloro che si accingono al grave ufficio di dettare opere didascaliche.

Nel poligono funicolare abbiamo avvertito il seguente teorema, non letto da noi in altri libri : Una porzione qualunque del poligono funicolare è in equilibrio sotto l' azione di forze esterne e le tensioni dei lati estremi se si verificano le seguenti condizioni; 1° che i due lati estremi sieno paralleli ad un piano condotto per la risultante delle forze attive applicate ai nodi intermedii ; 2° che la retta che misura la più corta distanza di questi lati, prolungati quanto occorre , passi per un punto della direzione della risultante; 3° che immaginando trasportate nelle loro direzioni le due tensioni alle estremità della medesima retta, le componenti di esse parallele alla risultante , sieno in ragion reciproca delle distanze dei loro punti di applicazione al punto della intersezione suddetta.

L'equilibrio della superficie è trattato in tutta la sua generalità; e i risultati a cui perviene l'Autore comprende come casi particolari quelli ai quali erano riusciti innanzi Lagrange e Poisson. Nell'equilibrio del filo elastico, che forma l'ultima Sezione della Statica, l'Autore con un processo molto elegante perviene alle formole già date da Binet o Wantzel.

Nella Dinamica si sogliono distinguere due parti, quella che considera il moto di un punto materiale, e l'altra che si occupa dei sistemi di più punti materiali. Il Prof. Mossotti nel suo trattato non fa questa distinzione, ma in sostanza le prime cinque Sezioni della sua Dinamica si riferiscono alla prima parte. Fra queste lezioni troviamo degna di speciale menzione la 17ª sul moto dei proietti nell'aria. È noto che le grandiose esperienze intraprese alla scuola di Metz sotto la direzione dei Sigg. Piobert, Morin e Didion mostrarono manifestamente che in molti casi della pratica non poteva adattarsi senza grave errore la legge della resistenza dell'aria usata dagli antichi artiglieri, e che faceva d' uopo assumerne un' altra la cui espressione analitica è composta di due parti, una proporzionale al quadrato e l'altra al cubo della velocità. Il Sig. Didion giovandosi di questa espressione della resistenza dell'aria e fondandosi sull'ipotesi che il rapporto di un elemento infinitamente piccolo dell'arco alla sua proiezione sull'asse delle x sia costante per una certa porzione della traiettoria, ha dato delle nuove formole per risolvere tutti i problemi balistici, accompagnandole con molte tavole che ne facilitano singolarmente il calcolo numerico. Il Prof. Mossotti suppone la resistenza dell' aria proporzionale al quadrato della velocità , ed esprime le coordinate di un punto qualunque della traiettoria (che riferisce alla tangente e alla normale del punto iniziale) per mezzo di serie convergenti, nel che non vi sarebbe novità, poichè non volendo adottare una qualche ipotesi che permetta l'integrazione in termini finiti dell' equazione differenziale della traiettoria, l'unica soluzione possibile è quella dello svi-

luppo in serie, come avevano già mostrato i Geometri, che si erano occupati di questo problema. Ma il metodo adoperato dal dotto Professore lo ha condotto ad ottenere serie non prima date da altri, le quali offrono altresì il vantaggio non piccolo di permettere l'uso delle tavole balistiche del Sig. Didion pel loro calcolo numerico.

Il Prof. Mossotti comincia la Dinamica dei sistemi con una bella e lunga lezione sui momenti d'inerzia, e sugli assi principali. Poi fondandosi sul principio di d'Alembert tratta successivamente i due problemi della rotazione di un corpo intorno ad un asse e ad un punto fisso. Il secondo problema occupa tre lezioni; nella prima vengono dimostrate quelle proprietà del movimento che Carnot chiamò geometriche, e che furono già argomento di un lavoro del chiariss. Giorgini; la seconda volge sulla ricerca delle equazioni generali del moto; la terza finalmente è intesa a far conoscere i risultati a cui sono giunti recentemente Poinsot e Jacobi. Queste tre lezioni si raccomandano per le doti che abbiamo riscontrate nella maggior parte delle altre, generalità di metodi e simmetria di formole. E in questa occasione diremo che una fra le più eleganti soluzioni del problema della rotazione intorno ad un punto fisso è, secondo il nostro parere, quella dovuto al Sig. Richelot.

La parte già pubblicata dell'Opera del Sig. Mossotti termina con tre lezioni, l'una sull'equazioni generali della Dinamica, la seconda sulla proprietà generale del moto dei sistemi di più punti materiali, la terza sull'equazione delle velocità virtuali. Nella prima lezione l'Autore dà l'equazioni dinamiche di Lagrange, che sogliono trovarsi in tutti i trattati di Meccanica razionale, deducendole dall'osservazione, di cui pure si giovò Coriolis (*Meca: des Corps Solides e Jour: de l'École Polytech.* Cah: 24°), che il moto di un sistema di punti materiali sollecitati da forze qualunque può ridursi a quello di punti materiali isolati, quando si considerino oltre le forze attive anche quelle passive provenienti dalle azioni, e reazioni che hanno luogo fra i punti del sistema. Ma il Sig. Mossotti persuaso a giusta cagione della somma importanza di fondare su basi inconcusse la ricerca dell'equazioni generali della Dinamica, ha voluto rimuovere ogni dubbio sottoponendo ad esame accurato e profondo varii particolari della teoria, sui quali gli scrittori che lo hanno preceduto passavano leggermente, stimandole pressochè evidenti. Le delicate considerazioni del dotto Professore debbono piacere a tutti coloro che amano il perfetto rigore delle dimostrazioni, e che al tempo stesso non credono che la Meccanica possa trattarsi come soggetto di pura analisi. È invero i quesiti sono scoglio contro cui facilmente rompono gli scrittori di Meccanica razionale, poichè seguendo le particolari inclinazioni o sono indotte a fare di questa scienza un ramo delle matematiche pure, o vanno innanzi a furia di sottili e prolissi argomenti appena sorretti di quando in quando da poche formole. Le lezioni del Prof. Mossotti anche per questo lato ci sembrano degne di lode, poichè se da una parte l'eleganza dei processi analitici manifesta nell'Autore un allievo della scuola di La-

grange, dall'altra la cura diligente colla quale sono illustrati i principii fondamentali della Meccanica ricordano lo scrittore abituato alle severe investigazioni della Fisica matematica.

Nell'ultima Lezione l'Autore applica l' equazione del principio delle velocità virtuali alla ricerca dell'equazioni generali di equilibrio e all'equilibrio stabile e instabile, ove trae profitto dal lavoro pubblicato su questo argomento di Dirichlet.

Il Sig. Chelini definisce la Dinamica *la scienza che ha per oggetto i moti di traslazione e di rotazione considerati nelle loro proprietà e nelle loro cagioni.* Non intendiamo quali ragioni abbiano potuto indurre l' egregio Professore ad allontanarsi dalla definizione ordinaria, e a sostituirne un'altra che sotto ogni rapporto ci sembra meno conveniente. Alla Dinamica di un punto materiale l'Autore consacra tre Capitoli, 1.° *Del moto rettilineo,* 2.° *Del moto sopra una data superficie, e sopra una data curva.* Nel secondo si trovano i teoremi più elementari della teoria delle forze centrali, che il Prof. Mossotti ha tralasciati di considerare nella sua opera. La Dinamica dei sistemi comprende sette capitoli, 1.° *Principio di unione fra la Statica e la Dinamica,* 2.° *Moto di rotazione intorno ad un asse;* 3.° *Teoria generale dei momenti d'inerzia;* 4.° *Moti simultanei di rotazione. Loro decomposizione, composizione e riduzione;* 5.° *Formole per le quali, date le forze esterne che agiscono sopra un sistema mobile intorno ad un punto fisso, si determina il moto del sistema, e viceversa;* 6.° *Della percossa dei corpi e del moto che ne segue;* 7.° *Dei moti relativi.* — Secondo il Sig. Chelini la Dinamica si collega alla Statica mediante il *principio di reazione continua,* che enuncia nel seguente modo: *Nel movimento di un sistema di punti materiali comunque collegati tra loro, le azioni delle forze continue sono ad ogni istante contrabilanciate dalle reazioni di essi punti, essendo queste reazioni eguali ed opposte alle corrispondenti forze d'inerzia.* Per le forze istantanee si ha naturalmente un principio analogo al precedente, e che chiama di *reazione istantanea.* Dalla composizione delle forze deduce quella delle quantità di moto elementare, e dà il nome di *coppia di moto* alla coppia che nasce dal trasportare nell'origine delle coordinate la quantità di moto di tutti i punti del sistema, e di *coppia d'inerzia* a quella che risulta dal fare un analogo trasporto delle forze d' inerzia dei medesimi punti. Il primo capitolo termina colla dimostrazione del principio della conservazione del moto del centro di gravità e di quello della conservazione delle aree. Nel capitolo secondo abbiamo trovato notevole l'articolo sesto sugli assi permanenti di rotazione; in cui l'Autore si giova dei recenti lavori di Poinsot, che in qualche parte generalizza. La teoria generale dei momenti d'inerzia è trattata ampiamente e molto bene; è fatto altresì cenno del momento d'inerzia rispetto ad un piano, di cui crediamo si sia occupato Binet pel primo.

Il Prof. Chelini ai metodi puramente analitici preferisce quelli di Poinsot, quindi

le teoriche contenute nei capitoli 1°, 5°, 6° sono redatte seguendo le idee del celebre Geometra, e giovandosi dei suoi più recenti lavori. Nel capitolo 5° è considerato il moto di un cono circolare che ruzzoli sopra un altro dello stesso vertice, ed è fatto un cenno dei due problemi della precessione degli equinozi e della nutazione dell'asse terrestre. Nella prima parte del capitolo 6° è data la soluzione di due problemi trattati da Poinsot nelle sue *Questions dynamiques*. Nel capitolo 7°, dopo aver trovate l'equazioni generali dei moti relativi, l'Autore le applica successivamente alla caduta dei gravi, ed alle oscillazioni del pendolo, per scoprire in questi movimenti un segno visibile della rotazione della terra.

Come appendice alla Meccanica dei solidi, il Sig. Chelini tratta del principio delle velocità virtuali, di cui da una dimostrazione che non si discosta molto da quella del Sig. Duhamel. Fra le applicazioni di questo principio si trovano la ricerca dell'equazioni differenziali della Dinamica sotto le due forme che han dato ad esse Lagrange e Hamilton; il principio delle forze vive; le condizioni per la stabilità dell' equilibrio di un sistema; il principio della minima azione, e talune considerazioni elementari sulle macchine. Dell'equazioni generali della Dinamica ci sarebbe sembrato opportuno che il chiaris: Geometra avesse mostrata una qualche applicazione desumendola dalle eleganti ricerche del Sig. Liouville, dai lavori di Jacobi e Schellbach. Queste applicazioni oltre ad avere una importanza propria, sarebbero tornate altresì acconce a far vedere agli studiosi l'utilità di quelle formole generali, e dar loro un idea del come possa trarsene profitto per la soluzione dei problemi.

Alla Meccanica dei corpi solidi tien dietro un breve trattato sulla Meccanica dei fluidi. L'Opera termina con un Appendice sui principii fondamentali delle matematiche, nel quale si ritrovano le idee già contenute nei precedenti lavori dell'Autore.

I nuovi trattati, che, avuto riguardo ai nomi degli Autori, abbiano voluto esaminare con qualche larghezza, sono di lieto augurio per l'insegnamento delle matematiche in Italia; e facciam voti perchè l'ottimo esempio trovi degni imitatori, che contribuiscono a rialzare nelle nostre scuole questi studii.

GIOVANNI NOVI.

SOPRA UN TEOREMA DI GEOMETRIA.

NOTA DEL PROF. ALESSANDRO DORNA.

Teorema. Sia O il *centro delle medie distanze* di più punti situati comunque si voglia nello spazio, e siano r, r' le distanze di O da due assi paralleli. Si chiami R^2 la media aritmetica dei quadrati delle distanze di tutti i punti dati da uno di questi assi, R'^2 la media dei quadrati delle distanze dall'altro asse: i quadrati r^2, r'^2, R^2, R'^2 formeranno una proporzione aritmetica, per modo che si avrà

$$(1) \qquad R'^2 - R^2 = r'^2 - r^2.$$

Per dimostrarlo, siano ρ, ρ' le distanze d'uno dei punti dati dai due assi, K la mutua distanza di questi, φ l'angolo di ρ con K: avremo

$$\rho'^2 = \rho^2 + K^2 - 2K\rho\cos\varphi,$$

e quindi

$$\sum \rho'^2 = \sum \rho^2 + nK^2 - 2K \sum \rho\cos\varphi$$

stendendo le sommatorie a tutti i punti dati di cui chiamiamo n il numero. Ma $\rho\cos\varphi$ uguaglia la distanza d'uno dei punti dati dal piano condotto pel primo asse, e perpendicolare al piano che contiene entrambi gli assi; onde chiamata δ la distanza di O da questo piano perpendicolare, sarà $\sum \rho\cos\varphi = \delta$. D'altra parte è

$$R^2 = \frac{\sum \rho^2}{n}, \qquad R'^2 = \frac{\sum \rho'^2}{n}:$$

dunque

$$R^2 = R^2 + K'^2 - 2K\delta,$$

ossia

$$R^2 - R^2 = \delta'^2 - \delta^2,$$

fatto $\delta' = K - \delta$. Ora δ' è la distanza di O da un altro piano perpendicolare condotto pel secondo asse, e se p indichi la perpendicolare calata da O sul piano dei due assi, si avranno due triangoli rettangoli da cui risulterà

$$r^2 = p^2 + \delta^2, \qquad r'^2 = p^2 + \delta'^2;$$

e però

$$r'^2 - r^2 = \delta'^2 - \delta^2;$$

quindi sostituendo si otterrà l'equazione (1).

Nel caso particolare in cui uno degli assi passa pel centro O, le linee r, r', K formano un triangolo rettangolo, e deducendosi da esso $r'^2 = r^2 + K^2$, l'equazione (1)

si cambia allora in

$$(2) \qquad R'^2 = R^2 + K^2.$$

Le formole (1), (2) ricevono un'applicazione in Meccanica, se i punti dati si considerano come gli elementi d'un corpo che abbia in O il suo centro di gravità. Per la formola (1), se questo corpo si move nello spazio, *i quadrati de' suoi raggi di girazione* R, R' *rispetto a due assi paralleli fissi, saranno sempre aritmeticamente proporzionali ai quadrati delle distanze r, r' del suo centro di gravità dai medesimi assi*, qualunque sia il corpo, comunque si muova, ed ovunque si prendano gli assi. Chiamata poi M la massa del corpo I, e I' i suoi momenti d' inerzia rispetto ai due assi sarà

$$MR^2 = I, \quad MR'^2 = I',$$

e la (1) diverrà :

$$(3) \qquad I' - I = M(r'^2 - r^2).$$

E se uno degli assi è condotto pel centro di gravità, la formola (2) darà similmente la nota equazione

$$(4) \qquad I' = I + MK^2$$

con la quale nella teorica dei momenti d' inerzia si passa da un asse condotto pel centro di gravità ad un altro parallelo qualsivoglia. Questa formola (4) non è dunque se non un caso particolare della (1), ossia della (3).



INTORNO AD ALCUNI INTEGRALI DEFINITI.

SYLVESTER — Notes to the Meditation on Poncelet's Theorem, including a Valuation of two Definite Integrals
The Philosophical Magazine — December 1860. Supplement.



I due integrali definiti la ricerca dei valori dei quali costituisce l'oggetto della nota D del citato lavoro del Sig. Sylvester sono i seguenti:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi}}\,d\varphi\,, \qquad D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\left[1+\sqrt{1+k^2\cos^2\varphi}\,\right]}{\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi}}\,d\varphi$$

i quali nella notazione delle funzioni ellittiche scrivendo sn.u per sen. am. u ec. equivalgono agli integrali definiti:

$$A = \int_0^K \log \mathrm{sn}.\,u\,du\,, \qquad D = \int_0^K \log(1+\mathrm{dn}.\,u)du\,. \,.$$

Ora il valore del primo di questi integrali è noto (*) e si ha:

$$A = -\frac{1}{2}K\log k - \frac{1}{4}\pi K'$$

ed il valore del secondo deducesi da quello di A e dal noto valore dell'integrale definito:

$$H = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\mathrm{sen}^2\varphi}} \log\left(\frac{1+\sqrt{1-k^2\mathrm{sen}^2\varphi}}{1-\sqrt{1-k^2\mathrm{sen}^2\varphi}}\right)d\varphi = \int_0^K \log\frac{1+\mathrm{dn}.u}{1-\mathrm{dn}.u}\,du = \pi K'$$

Infatti si ha:

$$H = \int_0^K \log\frac{(1+\mathrm{dn}.\,u)^2}{k^2\mathrm{sn}^2u}\,du = 2(D - K\log k - A)$$

e quindi:

$$D = -A$$

come ha dimostrato il Sig. Sylvester. Conoscendo il valore di A, mediante le più semplici proprietà delle funzioni ellittiche si ottengono quelli degli integrali:

$$B = \int_0^K \log \mathrm{cn}.\,u\,du \qquad C = \int_0^K \log \mathrm{dn}.\,u\,du$$

(*) Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1857. Ueber einige elliptische Integrale. Schlömilch. pag. 49. — Genocchi pag. 414.

considerati dal Sig. Schlömilch nella nota citata. Pongasi a ciò:

$$\psi(u) = \log \frac{\text{sn.}\, u\ \text{dn.}\, u}{\text{cn.}\, u}$$

si avrà:

$$\text{A} - \text{B} + \text{C} = \int_0^{\text{K}} \psi(u) du\,,$$

ora supponendo $u = \text{K} - v$ si ha:

$$\int_0^{\text{K}} \psi(u)\, du = \int_0^{\text{K}} \psi(\text{K} - v) dv$$

ove per le note proprietà delle funzioni $\text{sn.}\, u$, $\text{cn.}\, u$, $\text{dn.}\, u$ si ha:

$$\psi(\text{K} - v) = -\psi(v)$$

quindi:

$$\int_0^{\text{K}} \psi(u)\, du = 0$$

ossia:

$$\text{A} - \text{B} + \text{C} = 0.$$

Affatto analogamente si otterrà la:

$$-\text{A} + \text{B} + \text{C} = \text{K} \log k'$$

e da queste:

$$\text{B} = \text{K} \log \sqrt{\frac{k'}{k}} - \frac{1}{4}\pi \text{K}'\,, \qquad \text{C} = \frac{1}{2} \text{K} \log k'.$$

Così nell'integrale definito H ponendo $u = \text{K} - v$ si ha:

$$\int_0^{\text{K}} \log \frac{\text{dn}\, v + k'}{\text{dn}\, v - k'}\, dv = \pi \text{K}'$$

quindi:

$$\int_0^{\text{K}} \log \frac{(\text{dn}\, v + k')^2}{k^2 \text{cn}^2 v} = \pi \text{K}'$$

ed:

$$\int_0^{\text{K}} \log(\text{dn}\, v + k')\, dv = \frac{1}{2} \text{K} \log kk' + \frac{1}{4} \pi \text{K}'.$$

Molti altri integrali definiti si potrebbero determinare seguendo la stessa via. Per esempio il valore dell'integrale:

$$\int_0^{\text{K}} \lg\, \text{dn.}\, \text{mu}\, du$$

determinasi osservando che per la teoria delle funzioni ellittiche essendo :

$$\mathrm{dn}.(u+2p\mathrm{K}) = \mathrm{dn}.u \qquad \mathrm{dn}[u+(2p+1)\mathrm{K}] = \frac{k'}{\mathrm{dn}\,u}$$

si ha :

$$\int_0^{\mathrm{K}} \log \mathrm{dn}(u+2p\mathrm{K})\,du = \int_0^{\mathrm{K}} \log \mathrm{dn}[u+(2p+1)\mathrm{K}]\,du = \mathrm{C}$$

quindi :

$$\int_{2p\mathrm{K}}^{(2p+1)\mathrm{K}} \log \mathrm{dn}.u\,du = \mathrm{C}, \qquad \int_{(2p+1)\mathrm{K}}^{(2p+2)\mathrm{K}} \log \mathrm{dn}.u\,du = \mathrm{C}$$

ed in conseguenza :

$$\int_0^{\mathrm{K}} \log \mathrm{dn}.\,mu = \mathrm{C}$$

supposto m intero pari o dispari.

Pavia, Gennajo 1861.

PROF. F. BRIOSCHI.

ANNALI DI MAT. TOM. 3° 1860.

Pag.	lin.	ERRATA		CORRIGE
169	8	una Curva,	—	trovare una Curva
170	23	Superficie che	—	, Superficie tale che
ivi	5 (salendo)	CB	—	OB
171	4	$\frac{-w}{1}$	—	$-\frac{1}{w}$
ivi	25	$n(n-1)$	—	$n(n-1)^2$

ANNALI DI MAT. Tom. 2° 1859.

Pag.	lin.	ERRATA		CORRIGE
20	15	rettilinee	—	rettilinee ortogonali
25	11	2ª Equazione) A	—	D
ivi	18	loro	—	sono
27	28	F'	—	F
29	30	*due triangoli*	—	due triangoli congiunti
76	3	Θ	—	Φ
79	23	inscritta	—	inscritte
ivi	31	otterranno	—	alternano

19 Sulle linee del 3° ordine a doppia curvatura
Teoremi, ove si trova *anto-conjugati* si legga sempre *auto-conjugati*.

SULLE CONICHE E SULLE SUPERFICIE DI SECOND' ORDINE CONGIUNTE.

MEMORIA

DEL D[r]. LUIGI CREMONA.

Il signor Terquem, in un breve articolo inserito nel terzo volume del giornale di Liouville, primo considerò le *linee congiunte* in una conica, chiamando con questo nome due rette tali, che assunte per assi delle coordinate x, y, rendano eguali i coefficienti di x^2 ed y^2 nella equazione della curva, ossia due rette tali, che seghino, realmente o idealmente, la conica in quattro punti appartenenti ad una stessa circonferenza.

Poscia il professore Chasles, in una memoria che fa parte del medesimo volume di quel periodico matematico, trattò lo stesso argomento sotto l'aspetto della pura geometria, e, con quella fecondità che gli è propria, dimostrò un vasto sistema di proposizioni relative alle linee congiunte. Verso il fine della memoria, l'illustre geometra accenna brevemente come si possa applicare quella teorica alle superficie di second'ordine, ed enuncia alcune proprietà de'*coni congiunti*, cioè di quei coni di second'ordine che passano per l'intersezione di una sfera con una superficie dello stesso ordine. Ivi egli promette di ritornare su quest'ultimo argomento e di trattarlo più completamente; ma, per quanto io sappia, non diede seguito a tale suo proposito, certamente distratto da più gravi lavori; nè so se alcun altro abbia fatto le sue veci.

Se io oso, dopo tali predecessori, pubblicare questo, qualunque siasi lavoro, l'argomento del quale ha molta attinenza colla teorica delle linee e dei coni congiunti, non miro certamente a presentare una serie di verità che abbiano la pretesa d'essere affatto nuove. Anzi confesso che ho dedotto la maggior parte de'teoremi, qui sotto enunciati intorno alle superficie di second'ordine, da quelli dell'illustre Chasles sopra le superficie omofocali (*), mediante il metodo delle polari reciproche; e perciò stesso, ne ommetto, come superflue, le dimostrazioni. Mio unico scopo è di attirare l' attenzione di qualche benevolo lettore su d'una teoria che promette d'essere feconda quanto lo è quella de'luoghi omofocali, da cui la prima può derivarsi mercè la trasformazione polare.

È notissimo che le coniche omofocali si possono considerare come inscritte in uno stesso quadrilatero immaginario, avente due vertici reali (i due fuochi reali comuni

(*) *Aperçu historique*, Note 31[e] (*Propriétés nouvelles des surfaces du second degré, analogues à celles des foyers dans les coniques*). — *Comptes rendus de l'Académie de Paris*, 1860; N.[i] 24 et 25.

alle coniche), due vertici immaginari a distanza finita (i due fuochi immaginari situati sul secondo asse delle coniche) e il quinto e sesto vertice immaginari all'infinito (i punti circolari all'infinito). Il sig. Chasles ha enunciato pel primo l'analoga proprietà per le superficie omofocali (*). Più superficie omofocali, cioè dotate di sezioni principali omofocali, sono idealmente inscritte in una medesima superficie sviluppabile immaginaria, avente tre coniche di stringimento (una ellittica, la seconda iperbolica, la terza immaginaria) ne'piani principali comuni alle superficie date; mentre la quarta curva di stringimento è il cerchio immaginario all'infinito.

Se le superficie di second'ordine, che si considerano, sono coni, è noto che allato alla teorica de'coni omofocali esiste la teorica de'coni omociclici: teorica che si deriva dalla prima mediante la polarità supplementare (**). E da questa doppia teoria dei coni si conclude poi immediatamente la doppia teorica delle coniche sferiche omofocali e delle coniche sferiche omocicliche (***).

Ciò premesso, è ragionevole pensare che anche per le coniche piane e per le superficie di second'ordine in generale, esista una teoria analoga a quella de'coni omociclici; una teoria di un tale sistema di coniche o di superficie, che sia rispetto alle coniche circoscritte ad uno stesso quadrangolo o alle superficie passanti per una stessa curva gobba, ciò che le coniche e le superficie omofocali sono rispetto alle coniche inscritte in un quadrilatero e alle superficie inscritte in una stessa sviluppabile.

Questa memoria mostrerà che infatti tale teorica esiste e che essa è inclusa, come caso particolare, in quella di un sistema di coniche aventi le stesse linee congiunte, rispetto ad un dato cerchio, o di un sistema di superficie di second'ordine aventi gli stessi coni congiunti, relativamente ad una data sfera.

Coniche congiunte.

1. Data una conica riferita ad assi ortogonali:

$$U=0$$

si diranno *linee congiunte ad essa, rispetto ad un dato punto* (α, β), due rette che seghino idealmente la curva in quattro punti appartenenti ad una circonferenza di raggio nullo, avente il centro nel punto dato, ossia, ciò che è lo stesso, al sistema di due rette immaginarie ortogonali:

$$S=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=0\,.$$

(*) *Aperçu historique*, Note 31e.

(**) CHASLES, *Mémoire de géométrie pure sur les propriétés générales des cônes du second dégré* (*Nouveaux Mémoires de l'Acad. de Bruxelles*, tom. VI, 1830.)

(***) CHASLES, *Mémoire de géométrie sur les propriétés générales des coniques sphériques* (*Nouveaux Mém. de l'Acad. de Bruxelles*, t. VI). — *Comptes rendus*, 1860, N.° 13. — *Nouvelles Annales de Mathématiques*, juillet 1860.

Per trovare tali rette, basta porre l'equazione:

$$U + \omega S = 0$$

e determinare ω in modo che il discriminante di essa sia nullo. L'equazione precedente rappresenta evidentemente un sistema di coniche aventi le stesse linee congiunte rispetto al punto dato.

2. La conica data, riferita ai suoi assi principali, sia rappresentata dall'equazione:

$$ax^2 + by^2 - 1 = 0 \; \ldots\ldots \; (a > b).$$

Consideriamo le sue linee congiunte rispetto al centro della curva: rette che noi chiameremo semplicemente *linee congiunte*. Esse sono date dall'equazione:

$$ax^2 + by^2 - 1 + \omega(x^2 + y^2) = 0$$

quando diasi ad ω uno dei tre valori:

$$-a\,, \qquad -b\,, \qquad \infty\,.$$

Si hanno così i tre sistemi di linee congiunte:

$$(b - a)y^2 - 1 = 0\,, \quad (a - b)x^2 - 1 = 0\,, \qquad x^2 + y^2 = 0.$$

Le sole rette del secondo sistema sono reali, ed invero parallele all'asse focale, se la data conica è un'ellisse, o all'asse non focale, se essa è un'iperbole.

Que' tre sistemi di linee congiunte sono i lati e le diagonali di un quadrato immaginario, inscritto nella conica data e concentrico ad essa.

3. Ecco alcune proprietà delle linee congiunte di una conica: proprietà che sono polari reciproche di quelle che competono ai fuochi.

Data una retta inscritta fra le linee congiunte di una conica, gli angoli, sotto i quali son vedute dal centro la retta stessa e la parte di essa inscritta nella conica, hanno la stessa bissettrice.

Da cui segue:

Data una corda inscritta in una conica, se si dividono per metà l'angolo sotto il quale la corda è veduta dal centro e l'angolo supplementare; la corda sarà incontrata in quattro punti armonici dalle due bissettrici e dalle linee congiunte.

Se nel precedente teorema la retta data è tangente alla conica si ha:

Data una retta tangente ad una conica, il raggio vettore che va al punto di contatto divide pel mezzo l'angolo sotto il quale si vede dal centro la porzione di tangente compresa fra le linee congiunte.

E per conseguenza:

Una tangente qualunque di una conica è segata armonicamente dalle linee congiunte, dal raggio vettore che va al punto di contatto e dal raggio a questo perpendicolare.

4. *Dato un punto arbitrario* m *e presa la sua polare* M *rispetto ad una conica; se* m' *è quel punto di* M *che è quarto armonico dopo i punti in cui* M *incontra le linee congiunte e la parallela ad esse condotta per* m*; il segmento* mm' *è veduto dal centro sotto angolo retto.*

Reciprocamente:

Un segmento rettilineo, veduto dal centro di una conica sotto angolo retto, e i cui termini siano punti coniugati relativamente a questa, è diviso armonicamente dalle linee congiunte.

E come caso speciale:

Due punti coniugati rispetto ad una conica, presi su d'una linea congiunta, sono sempre veduti dal centro sotto angolo retto.

Quest'ultima proprietà può anche risguardarsi come compresa nella seguente:

Un angolo circoscritto ad una conica determina su d'una linea congiunta di questa un segmento veduto dal centro sotto un angolo, il cui supplemento ha per bissettrice il raggio vettore condotto al punto in cui la corda di contatto incontra la linea congiunta.

5. *Se una tangente qualunque di una conica di centro* O *incontra le linee congiunte rispettivamente ne' punti* α, β*; condotte per* O *le rette perpendicolari ai raggi* $O\alpha$, $O\beta$, *l'una di esse incontri la tangente in* m *e la prima linea congiunta in* a; *l'altra seghi la tangente in* n *e la seconda linea congiunta in* b. *Allora si avrà:*

$$\left(\frac{1}{Om}-\frac{1}{Oa}\right)\pm\left(\frac{1}{On}-\frac{1}{Ob}\right)=\text{cost.}$$

Se una retta condotta pel centro O *di una conica incontra questa in* m *e una linea congiunta in* m', *la quantità* $\frac{1}{\overline{Om}^2}-\frac{1}{\overline{Om'}^2}$ *è costante, qualunque sia la direzione della trasversale diametrale.*

Se un angolo circoscritto ad una conica di centro O *ha il vertice su d'una linea congiunta, e se il raggio vettore perpendicolare a quello che va al vertice incontra la linea congiunta in* a *e i lati dell'angolo in* m, m', *avremo:*

$$\frac{Om\,.\,Oa}{ma}+\frac{Om'.\,Oa}{m'a}=\text{cost.}\,;\qquad \frac{ma\,.\,m'a}{\overline{Oa}^2\,.\,mm'}=\text{cost.}$$

Data una retta fissa che incontri una linea congiunta di una conica di centro O *in* r*; se da un punto qualunque della retta fissa si conducono due tangenti alla conica, le quali incontrino la linea congiunta in* p, q; *avremo:*

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,pOr\,.\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,q\,Or=\text{cost.}$$

6. *Data una conica, ogni corda in essa inscritta e passante pel polo di una linea congiunta è veduta dal centro sotto angolo retto.*

Una tangente qualunque di una conica e la retta che unisce il punto di contatto al polo di una linea congiunta determinano su di questa un segmento veduto dal centro sotto angolo retto.

Se da un punto qualunque di una linea congiunta ad una conica di centro O *si conducono due rette toccanti la curva rispettivamente in* m *ed* n *; e se su di esse si prendono due altri punti* m', n' *in modo che gli angoli* mOm', nOn' *siano retti, le rette* mm', nn' *si segheranno sull'altra linea congiunta.*

Sia data una conica di centro O, *una sua linea congiunta ed il polo* a *di questa. Una tangente qualunque della conica incontri* Oa *in* m. *Inoltre il raggio perpendicolare a quello che va al punto d'incontro della tangente colla linea congiunta incontri queste rette in* m', n. *Sarà:*

$$\left(\frac{1}{Oa}-\frac{1}{Om}\right):\left(\frac{1}{Om'}-\frac{1}{On}\right)=\text{cost.}$$

Due tangenti di una conica incontrano le due rette congiunte in quattro punti appartenenti ad un' altra conica che ha un fuoco nel centro della data e per relativa direttrice la corda di contatto delle due tangenti.

Ec. ec.

7. L'equazione :

$$(1) \qquad (a+\omega)x^2+(b+\omega)y^2-1=0,$$

ove si consideri ω indeterminata, rappresenta un sistema di coniche aventi le stesse linee congiunte, rispetto al centro comune. Le chiamerò *coniche congiunte.* Queste coniche hanno in comune gli assi, e son desse appunto che corrispondono, polarmente, alle coniche omofocali.

L' equazione (1) mostra che *più coniche congiunte si ponno risguardare come circoscritte allo stesso quadrato immaginario, formato dai tre sistemi di linee congiunte.*

Il sistema (1) contiene infinite ellissi ed infinite iperboli. Le ellissi sono tutte nello spazio compreso fra le due linee congiunte reali; le iperboli tutte al di fuori, ciascuna avendo un ramo da una banda e l'altro dalla banda opposta, rispetto alle linee congiunte. Ciascuna ellisse ha l'asse maggiore parallelo alle linee congiunte; ciascuna iperbole ha l'asse focale perpendicolare alle linee congiunte. La serie delle ellissi comincia da quel punto, che è centro comune delle coniche congiunte, e finisce col sistema delle linee congiunte. La serie delle iperboli comincia con questo sistema e procede indefinitamente, senza limite reale. Onde :

Per un punto qualunque nel piano di una conica passa sempre una, ed una sola, conica congiunta alla data; la quale è iperbole o ellisse secondo che il punto sia fuori o entro lo spazio compreso fra le linee congiunte.

Invece *una retta qualunque tocca sempre due coniche congiunte ad una data, le quali sono di specie diversa.* I due punti di contatto sono veduti dal centro sotto angolo retto; ed i raggi vettori che vanno ai punti di contatto sono le bissettrici dell' angolo formato dai raggi condotti ai punti in cui la retta sega qualunque altra conica congiunta alla data. Cioè:

Dato un fascio di coniche congiunte ed una retta trasversale, le porzioni di questa comprese fra le coniche sono vedute dal centro sotto angoli che hanno le stesse bissettrici. Queste incontrano la trasversale ne' punti in cui essa tocca due coniche del fascio.

Date in un piano due rette parallele, si ponno descrivere infinite coniche, ellissi ed iperboli, di cui quelle siano le linee congiunte. Ogni ellisse ha con ciascuna iperbole quattro tangenti comuni, e per ciascuna di queste i due punti di contatto sono veduti dal centro sotto angolo retto.

L'inviluppo di una retta inscritta fra due coniche congiunte e veduta dal loro centro sotto angolo retto, è una circonferenza concentrica alle coniche date.

8. *In due coniche congiunte, la differenza degl'inversi quadrati di due semidiametri nella stessa direzione è costante.* (Questa costante è la differenza dei valori del parametro ω, relativi alle due coniche).

Per conseguenza:

Quando un'ellisse ed un'iperbole sono congiunte, la prima è incontrata dagli assintoti della seconda in quattro punti situati sopra una circonferenza concentrica alle coniche date. L'inverso quadrato del raggio di questa circonferenza è la differenza de'valori di ω, corrispondenti alle due coniche.

Dato un fascio di coniche congiunte, i due punti in cui una trasversale arbitraria tocca due di queste curve, sono coniugati rispetto a qualsivoglia conica del fascio.

Dato un fascio di coniche congiunte, una trasversale arbitraria le sega in coppie di punti formanti un' involuzione. I punti doppi di questa involuzione sono quelli ove la trasversale tocca due coniche del fascio. I raggi vettori, condotti dal centro comune delle coniche ai punti dell'involuzione anzidetta, formano un'altra involuzione, nella quale l'angolo di due raggi omologhi, e l'angolo supplementare sono divisi per metà dai raggi doppi.

9. *I poli di una trasversale arbitraria, relativi a più coniche congiunte, sono in un'iperbole equilatera che passa pel centro comune delle coniche date ed ha gli assintoti rispettivamente paralleli agli assi di queste.*

Il ramo di quest'iperbole, che passa pel centro delle coniche congiunte, è ivi diviso in due parti. La parte che allontanandosi da questo centro si va accostando alle linee congiunte, contiene i poli relativi alle ellissi appartenenti al dato sistema di coniche. L'altra parte contiene i poli relativi a coniche immaginarie.

L'altro ramo poi contiene i poli relativi alle iperboli.

Se in un punto qualunque dell'iperbole equilatera si conduce la retta tangente alla conica congiunta che passa per esso, questa retta va ad incontrare la trasversale in un punto, pel quale passa un'altra conica congiunta, ivi toccata dalla medesima retta.

Le rette polari di un punto m *rispetto a più coniche congiunte, passano per uno stesso punto* m'. I punti m, m' sono veduti dal centro comune delle coniche sotto angolo retto.

Se il punto m *percorre una retta* l, *il punto* m' *descrive l'iperbole luogo dei poli di* l.

Ecc. ecc.

10. Se:

$$ux + vy = 1$$

è l'equazione di una retta, la condizione ch'essa tocchi la conica (1) è:

$$\frac{u^2}{a+\omega} + \frac{v^2}{b+\omega} = 1.$$

Siano μ, $-\nu$ le radici di questa equazione quadratica, cioè i parametri delle due coniche toccate dalla retta proposta. Si avrà:

$$\mu - \nu = u^2 + v^2 - (a+b)\ , \qquad \mu\nu = bu^2 + av^2 - ab\ ,$$

da cui:

$$u^2 = \frac{(a+\mu)(a-\nu)}{a-b}\ , \quad v^2 = \frac{(\mu+b)(\nu-b)}{a-b}.$$

Le quantità μ, ν si ponno assumere come *coordinate ellittiche tangenziali*..

Superficie di second'ordine congiunte.

11. Data la superficie di second'ordine:

$$(1) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$$

e la sfera di raggio nullo, o cono immaginario:

$$(2) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = 0\ ,$$

qualunque superficie (di second'ordine), circoscritta alla loro curva di ideale intersezione, è rappresentata dall'equazione:

$$(3) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 + \omega\left[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2\right] = 0.$$

Tutte le superficie comprese in questa equazione hanno in comune le direzioni dei piani ciclici. Il luogo dei centri delle medesime è la cubica gobba:

$$x = \frac{\alpha\omega}{a + \omega}, \quad y = \frac{\beta\omega}{b + \omega}, \quad z = \frac{\gamma\omega}{c + \omega}$$

che ha gli assintoti paralleli agli assi principali delle superficie (3). Questa curva ha quattro punti appartenenti alle superficie, di cui sono i rispettivi centri: i quali punti sono i vertici del tetraedro polare comune, ossia sono i vertici d'altrettanti coni che fanno parte del sistema (3), secondo il noto teorema di Poncelet (*). Uno di tali coni è quello rappresentato dalla (2). Questi coni diconsi *congiunti* alla superficie data (1) relativamente al punto (α, β, γ). Diremo anche che tutte le superficie (3) sono *congiunte* rispetto a questo medesimo punto.

12. Data adunque una superficie di second'ordine, riferita ad assi ortogonali:

$$U = 0$$

ed un punto O di coordinate (α, β, γ), tutte le superficie *congiunte* ad essa rispetto a questo punto sono incluse nell'equazione:

$$U + iS = 0$$

essendo:

$$S = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2$$

ed i un parametro indeterminato.

Se $U = 0$ rappresenta il sistema di due piani, questi diventano i *piani direttori* relativi al *fuoco* O per la superficie $U + iS = 0$; cioè O è un *punto focale* per questa superficie, e que'due piani sono i corrispondenti *piani direttori* (**). Se i due piani $U = 0$ passano pel punto O, la superficie $U + iS = 0$ è un cono del quale O è il vertice e que'due piani sono i piani ciclici.

Se U è il quadrato d'una funzione lineare delle x, y, z, cioè se $U=0$ rappresenta un piano unico, la superficie $U + iS=0$ è di rotazione: per essa O è un fuoco ed $U = 0$ è il relativo piano direttore. Se il piano $U = 0$ passasse per O, la superficie $U + iS = 0$ sarebbe un cono di rotazione, avente il vertice in O e l'asse perpendicolare al piano $U = 0$.

Ciò posto, siamo in grado di dimostrare assai semplicemente quattro teoremi generali, sulle superficie congiunte, correlativi di quelli che l'illustre Chasles diede recentemente sulle superficie omofocali (***).

13. Posto:

$$A' = A + \lambda S, \quad B = \mu U + A, \quad B' = \mu' U + A',$$

avremo:

(*) *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris, 1822: p. 395.

(**) Vedi la memoria di AMIOT sulle superficie di second'ordine (*Liouville, t.* 8.)

(***) *Comptes rendus*, 1860, N.° 24.

$$\mu' B - \mu B' = \mu' A - \mu A' , \qquad B - B' = (\mu - \mu') U - \lambda S ;$$

dunque :

Teorema 1.° *Date due superficie* A, A' *congiunte rispetto ad un punto* O , *ed un'altra superficie qualunque* U, *se per le due curve* (UA), (UA') *si fanno passare rispettivamente due superficie* B, B'; *per la curva* (BB') *si potrà far passare una superficie congiunta ad* A, A' *ed un'altra superficie congiunta ad* U , *rispetto allo stesso punto* O.

Se la superficie U riducesi al sistema di due piani u, u', si ha :

a) *Date due superficie* A, A' *congiunte rispetto ad un punto* O, *segate da due piani* u , u', *se si fa passare una superficie* B *per le sezioni di* A *ed una superficie* B' *per le sezioni di* A'; *per la curva* (BB') *si potrà far passare una superficie congiunta con* A, A' *rispetto ad* O, *ed un'altra superficie di cui* O *sia un punto focale ed* u, u' *i relativi piani direttori.*

I piani u, u' passino per O :

b) *Date due superficie* A, A' *congiunte rispetto ad un punto* O, *segate da due piani* u, u' *passanti per* O ; *se si fa passare una superficie* B *per le sezioni di* A *ed una superficie* B' *per le sezioni di* A'; *per la curva* (BB') *si potrà far passare una superficie congiunta con* A, A' *rispetto ad* O, *ed un cono (di second'ordine) di cui* O *sia il vertice ed* u, u' *i piani ciclici.*

Se i piani u, u' coincidono si ha :

c) *Date due superficie* A, A' *congiunte rispetto ad un punto* O, *se si descrivono due altre superficie* B, B' *tangenti rispettivamente alle date lungo le sezioni fatte da uno stesso piano* u , *per la curva* (BB') *si potrà far passare una superficie congiunta con* A, A' *rispetto ad* O, *ed una superficie di rotazione avente un fuoco in* O *ed* u *per relativo piano direttore.*

d) *Date due superficie* A, A' *congiunte rispetto ad un punto* O, *se si descrivono due altre superficie* B, B' *tangenti rispettivamente alle date lungo le sezioni fatte da uno stesso piano* u *passante per* O ; *per la curva* (BB') *si potrà far passare una superficie congiunta con* A, A' *rispetto ad* O, *ed un cono di rotazione avente il vertice in* O *e l'asse perpendicolare al piano* u.

Se il piano u va tutto all'infinito si ha :

e) *Date due superficie* A, A' *congiunte rispetto ad un punto* O, *se si descrivono due altre superficie* B, B' *rispettivamente omotetiche alle date; per la curva* (BB') *si potrà far passare una superficie congiunta ad* A, A' *rispetto ad* O, *ed una sfera il cui centro sia lo stesso punto* O.

14. Sia A un cono congiunto ad A'; U il sistema di due piani tangenti ad A; B il piano delle due generatrici di contatto. Il teorema 1.° dà :

f) *Data una superficie* A' *ed un suo cono congiunto* A *rispetto ad un punto* O,

se A′ *vien segata da due piani tangenti di* A *e per le due coniche di sezione si fa passare una superficie* B′, *questa toccherà lungo una stessa conica una superficie congiunta con* A′ *rispetto ad* O, *ed un'altra superficie per la quale* O *è un punto focale, ed i due piani tangenti di* A *sono i relativi piani direttori. E la conica di contatto sarà nel piano delle due generatrici di contatto del cono* A.

Sia U una sfera col centro O; A il suo cono assintotico; B sarà una sfera concentrica ad U; onde:

g) *Date due sfere concentriche* U, B, *ed una superficie qualunque* A′, *se per la curva* (UA′) *si fa passare una superficie* B′; *per la curva* (BB′) *passerà una superficie congiunta ad* A′ *rispetto al centro di* U *e* B.

Se B si riduce al centro di U, abbiamo:

h) *Data una sfera* U *ed una superficie qualunque* A′, *se per la curva* (UA′) *si fa passare una superficie* B′, *si potrà determinare un'altra superficie che sia concentrica ed omotetica con* A′, *e congiunta con* B′ *rispetto al centro di* U.

15. Posto:

$$A' = A + \lambda S, \qquad B = \mu U + A.$$

avremo:

$$\mu U + A' = B + \lambda S;$$

dunque:

Teorema 2.° *Date due superficie* A, A′ *congiunte rispetto ad un punto* O *ed una superficie qualsivoglia* U, *se per la curva* (UA) *si fa passare una superficie* B; *si potrà per la curva* (UA′) *far passare una superficie* B′ *congiunta a* B *rispetto allo stesso punto* O.

Sia A un cono congiunto ad A′; U un piano passante pel vertice di A:

k) *Data una superficie* A′ *ed un cono* A *congiunto ad essa rispetto ad un punto* O; *descritto un altro cono* B *che tocchi* A *lungo due generatrici; si potrà inscrivere in* A′ *una superficie* B′ *congiunta al cono* B *rispetto al punto* O; *e la curva di contatto fra* A′ *e* B′ *sarà nel piano delle due generatrici di contatto fra i coni* A *e* B.

Si prenda per B il sistema di due piani tangenti al cono A:

l) *Data una superficie* A′ *ed un cono* A *congiunto ad essa rispetto ad un punto* O; *due piani tangenti di* A *sono i piani direttori, relativi al punto focale* O, *di una superficie* B′ *inscritta in* A′; *la curva di contatto di queste superficie è nel piano delle generatrici lungo le quali il cono* A *è toccato dai due suoi piani tangenti.*

La superficie U sia circoscritta ad A lungo una conica il cui piano sia B. Il teorema 2.° dà:

m) *Date due superficie* A, A′ *congiunte rispetto ad un punto* O, *ed un'altra superficie* U *tangente ad* A *lungo una conica, per la curva* (UA′) *si potrà far passare una superficie di rotazione avente un fuoco in* O *e per relativo piano direttore il piano del contatto fra* U *ed* A.

Sia A un cono congiunto ad A'; U il sistema di due piani tangenti ad A; B il piano delle due generatrici di contatto. Avremo:

n) *Data una superficie A' ed un cono A congiunto ad essa rispetto ad un punto O; se A' vien segata da due piani tangenti di A, per le due coniche di sezione si potrà far passare una superficie di rotazione avente un fuoco in O, e per relativo piano direttore il piano delle due generatrici, lungo le quali il cono A è toccato dai due suoi piani tangenti.*

p) *Data una superficie A' ed un cono A congiunto ad essa rispetto ad un punto O; se A vien segato da un piano passante pel suo vertice e per O, secondo due generatrici; i piani tangenti ad A lungo queste generatrici segano A' in due coniche, per le quali si può far passare un cono di rotazione avente il vertice in O e l'asse perpendicolare al piano delle due generatrici di A.*

16. Posto:

$$A' = \lambda' S + A\ , \qquad A'' = \lambda'' S + A$$

$$B' = \mu' U + A'\ , \qquad B'' = \mu'' U + A'',$$

se ne ricava:

$$\lambda'' B' - \lambda' B'' = (\lambda''\mu' - \lambda'\mu'')U + (\lambda'' - \lambda')A\ ;$$

dunque:

Teorema 3°. *Date tre superficie A, A', A'' congiunte rispetto ad un punto O, ed una superficie qualsivoglia U, se per le curve (UA'), (UA'') si fanno passare rispettivamente le superficie B', B''; le curve (B'B''), (UA) saranno situate su di una stessa superficie (di second'ordine).*

La superficie U sia un piano:

q) *Date tre superficie congiunte A, A', A'' segate da uno stesso piano, se si inscrivono rispettivamente in A', A'' lungo le rispettive sezioni due superficie B', B''; si potrà per la curva (B' B'') far passare una superficie tangente ad A lungo la sezione in essa fatta dal piano dato.*

Le superficie A, A', A'' siano tre coni congiunti, U il piano de'loro vertici; B' il sistema dei piani tangenti ad A' lungo le generatrici, in cui questo cono è segato dal piano U; B'' il sistema dei piani tangenti ad A'' lungo le generatrici in cui quest' ultimo cono è segato dal medesimo piano U. Il teorema 3°. ci dà:

r) *Dati tre coni congiunti, ciascuno segato secondo due generatrici dal piano determinato dai loro vertici, se si conducono i piani tangenti al primo cono e i piani tangenti al secondo lungo le rispettive generatrici d'intersezione, i due primi piani tangenti segano gli altri due in quattro rette, situate in uno stesso cono (di second'ordine) tangente al terzo de'coni dati lungo le due generatrici in cui questo è segato dal piano dei tre vertici.*

*

17. Posto:

$$A = U + aV\,, \quad B = U + bV\,, \quad C = U + cV\,,$$
$$A' = A + a'S\,, \qquad B' = B + b'S\,,$$

avremo:

$$(c - b)A' + (a - c)B' = (a - b)C + [a'(c - b) + b'(a - c)]\,S$$

ed inoltre:

$$b'A' - a'B' = b'A - a'B\,.$$

Dunque:

Teorema 4.° *Quando tre superficie* A, B, C *passano per una stessa curva, se si prendono due superficie* A', B' *congiunte ordinatamente ad* A, B, *rispetto ad uno stesso punto* O; *per la curva* (A'B') *si può far passare una superficie* C' *congiunta a* C *rispetto ad* O. *E le curve* (ABC), (A'B'C') *sono situate su di una stessa superficie* (*di second'ordine*).

Le superficie A, B siano circoscritte l'una all'altra; per C si prenda il piano della curva di contatto, o il cono involvente A e B lungo questa curva. Si avrà così:

s) *Quando due superficie* A, B *si toccano lungo una conica, se si descrivono due altre superficie* A', B' *ordinatamente congiunte a quelle rispetto ad uno stesso punto* O; *per la curva* (A' B') *passeranno le tre seguenti superficie: una superficie di rotazione avente un fuoco in* O *e per piano direttore il piano del contatto* (AB); *una superficie congiunta, rispetto ad* O, *al cono involvente* A *e* B; *una superficie circoscritta ad* A *e* B *lungo la loro curva di contatto.*

La superficie B sia un cono involvente A; e C sia il piano della curva di contatto:

t) *Date due superficie* A, A' *congiunte rispetto ad un punto* O, *ed un cono involvente* A; *se si descrive una superficie* B' *congiunta a* B *rispetto ad* O; *per la curva* (A'B') *passeranno: una superficie di rotazione avente un fuoco in* O *e per relativo piano direttore il piano del contatto* (AB); *ed una superficie tangente ad* A *lungo la curva di contatto fra* A *e il cono* B.

Sia A un cono, B il sistema di due suoi piani tangenti, C il piano delle due generatrici di contatto.

u) *Data una superficie* A', *un cono* A *ad essa congiunto rispetto ad un punto* O, *e due piani tangenti di* A; *se si descrive una superficie* B' *per la quale* O *sia un punto focale, ed i due piani tangenti di* A *siano i relativi piani direttori; per la curva* (A'B') *passerà una superficie di rotazione avente un fuoco in* O *e per relativo piano direttore il piano delle due generatrici di contatto del cono* A *co'suoi due piani tangenti; e passerà inoltre un cono tangente al cono* A *lungo quelle due generatrici.*

Se il piano delle due generatrici passa per O, la superficie di rotazione menzionata nel precedente teorema è un cono.

Proprietà di una superficie di second'ordine relative ai suoi cilindri congiunti.

18. Data una superficie di second'ordine, dotata di centro, riferita ai suoi piani principali:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0 \qquad (1)$$

vogliamo ricercare i suoi *coni congiunti* relativi al centro di essa. Qualunque superficie congiunta colla (1) rispetto al suo centro, ossia passante per la ideale intersezione della (1) col cono immaginario:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \qquad (2)$$

è rappresentata dall'equazione:

$$(a + \omega)x^2 + (b + \omega)y^2 + (c + \omega)z^2 - 1 = 0 \qquad (3)$$

onde tutte quelle superficie sono concentriche ed hanno i medesimi piani principali. L'equazione (3) rappresenta un cono per

$$\omega = \infty, \ -a, \ -b, \ -c;$$

epperò, oltre il cono (2) si hanno i tre coni congiunti:

$$\begin{aligned} (b - a)y^2 + (c - a)z^2 - 1 &= 0 \\ (c - b)z^2 + (a - b)x^2 - 1 &= 0 \\ (a - c)x^2 + (b - c)y^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

i quali sono tre *cilindri*, aventi rispettivamente le generatrici parallele agli assi principali della superficie data (1). Noi li chiameremo *i tre cilindri congiunti* della superficie data. Ritenuto $a > b > c$, il primo cilindro è immaginario; il secondo che ha le generatrici parallele ai piani ciclici della (1) è iperbolico; il terzo è ellittico.

Paragonando le equazioni (4) con quelle delle sezioni principali delle superficie (1), risulta che:

Ciascun piano principale di una superficie di second'ordine sega questa e il cilindro congiunto ad esso perpendicolare secondo due coniche aventi le stesse linee congiunte (rispetto al loro centro comune). I tre sistemi di linee congiunte comuni sono le intersezioni del piano principale cogli altri due cilindri congiunti e col cono immaginario congiunto (2).

Ciascuno de'tre cilindri congiunti individua gli altri due; e se prendiamo a considerare l'iperbole e l'ellisse, basi de'due cilindri reali, ciascuna di queste coniche ha due vertici nelle linee congiunte reali dell'altra.

Segue da ciò:

Quando due superficie di second'ordine hanno le sezioni principali rispettivamente dotate delle stesse linee congiunte (rispetto al loro centro comune), esse hanno i medesimi cilindri congiunti. E reciprocamente, se due superficie di second'ordine hanno un cilindro congiunto comune, le loro sezioni principali avranno rispettivamente, le stesse linee congiunte.

19. I teoremi n) e p), n.º 15, applicati alla superficie data e ad un suo cilindro congiunto, somministrano:

Due piani tangenti ad un cilindro congiunto di una superficie di second'ordine segano questa secondo due coniche per le quali si può far passare una superficie di rotazione avente un fuoco nel centro della superficie data. Il relativo piano direttore è il piano delle due generatrici di contatto del cilindro coi suoi due piani tangenti.

Data una superficie di second'ordine, se un piano condotto pel centro di essa, parallelamente ad un cilindro congiunto, sega questo in due generatrici; i piani tangenti al cilindro lungo queste generatrici segano la superficie data in due coniche, per le quali passa un cono di rotazione concentrico alla medesima superficie data. L'asse di questo cono è perpendicolare al piano segante il cilindro congiunto.

Reciprocamente:

I cilindri congiunti di una superficie di second'ordine sono l'inviluppo dei piani delle coniche d'intersezione di questa superficie colle superficie di rotazione, omologiche ad essa, ed aventi un fuoco nel centro della data. Inoltre gli stessi cilindri sono il luogo delle rette d'intersezione dei piani delle coniche anzidette coi piani direttori delle superficie di rotazione, relativi al loro fuoco comune.

Segue dal precedente teorema che:

Data una superficie di second'ordine, i piani assintoti del suo cilindro congiunto iperbolico la segano in due cerchi pe'quali passa una sfera concentrica alla superficie data.

Se la superficie (1) è un ellissoide, il cilindro congiunto ellittico le è tutto esterno, epperò nessun piano tangente di questo incontra quella. Invece il cilindro iperbolico congiunto ha quattro piani tangenti comuni all'ellissoide, i quali costituiscono i limiti di separazione fra quei piani tangenti del cilindro che segano l'ellissoide e quelli che non lo segano.

Se la superficie (1) è un iperboloide ad una falda, tutt'i piani tangenti de'due cilindri congiunti reali segano effettivamente la superficie data.

Se la superficie (1) è un iperboloide a due falde, essa non è incontrata da alcun piano tangente del cilindro iperbolico congiunto. Il cilindro ellittico ha quattro piani tangenti comuni colla superficie data, i quali separano i piani del cilindro che segano l'iperboloide da quelli che non lo segano.

20. Il teorema l), n.° 15, applicato alla superficie (1) e ad un suo cilindro congiunto, diviene:

Due qualisivogliano piani tangenti di un cilindro congiunto di una data superficie di second'ordine sono i piani direttori, relativi al centro di questa, preso come punto focale, di un'altra superficie di second'ordine inscritta nella data lungo una conica, il cui piano passa per le due generatrici di contatto del cilindro co' suoi due piani tangenti.

E come caso particolare:

I due piani assintoti del cilindro iperbolico congiunto ad una data superficie di second'ordine sono i piani ciclici del cono assintotico della superficie data.

21. I teoremi f), n.° 14 ed u), n.° 17 applicati alla superficie (1) danno:

Data una superficie di second'ordine, un suo cilindro congiunto e due piani tangenti di questo, se immaginiamo:

1.° *La serie infinita delle superficie di second'ordine che si possono far passare per le due coniche, intersezioni della data superficie co' due piani tangenti del cilindro congiunto;*

2.° *La serie infinita delle superficie, aventi un punto focale nel centro della data e per relativi piani direttori, i due piani tangenti del cilindro;*

3.° *La serie infinita delle superficie di rotazione, aventi un fuoco nel centro della superficie data e per relativo piano direttore il piano delle due generatrici, lungo le quali il cilindro congiunto è toccato dai suoi due piani tangenti;*

4.° *La serie infinita de' cilindri tangenti al dato lungo le due generatrici anzidette;*

Le quattro serie sono omografiche;

Due superficie corrispondenti nelle prime due serie si toccano fra loro lungo una conica situata nel piano delle due generatrici del cilindro dato;

Tre superficie corrispondenti nelle ultime tre serie passano per una stessa curva situata sulla superficie data.

22. È evidente la corrispondenza fra le proprietà de' cilindri congiunti e quelle delle *coniche eccentriche* o *focali* in una superficie di second' ordine. Ed invero le une si deducono dalle altre col metodo delle polari reciproche, assumendo, come superficie direttrice, una sfera concentrica alla superficie data. Io ho applicato questo processo di trasformazione alle belle proprietà delle coniche eccentriche enunciate dal sig. Chasles nella *Nota XXXI* del suo *Aperçu historique*, e ne ho così ricavato buona parte de' risultati che seguono.

In primo luogo ne ho dedotto il seguente teorema che inchiude una nuova definizione dei cilindri congiunti:

Data una superficie di second'ordine (*di centro* O) *ed un punto qualunque* m

nello spazio, s'immagini la retta l *intersezione del piano polare ai* m (*relativo alla superficie data*), *col piano condotto per* O *perpendicolarmente al raggio vettore* Om. *Se ora pel punto* m *e per la retta* l *conduciamo rispettivamente una retta ed un piano paralleli ad un asse principale della superficie data, la retta sarà la polare del piano relativamente ad un cilindro determinato, qualunque sia il punto* m. *Questo cilindro, parallelo all'asse principale nominato, è uno de'congiunti della superficie data.*

Ossia :

Data una superficie di second' ordine, ed un punto m *situato comunque nello spazio, se si prenda il piano polare di* m *rispetto alla superficie, ed il piano polare, relativamente ad un cilindro congiunto, della retta condotta per* m *parallela al cilindro, la retta comune ai due piani polari ed il punto* m *sono veduti dal centro della superficie data sotto angolo retto.*

Quando il punto m è preso sulla data superficie, il suo piano polare relativo a questa è il piano tangente. In tal caso, la retta intersezione del piano tangente col piano condotto per O perpendicolarmente al raggio vettore Om, può chiamarsi , in difetto d'altra denominazione, *polonormale.*

Quindi dal precedente teorema ricaviamo :

Se una retta parallela ad un cilindro congiunto di una superficie di second'ordine incontra questa in due punti, le polonormali di questi punti giacciono nel piano polare di quella retta relativo al cilindro.

23. Se sulla data superficie si fa partire un piano tangente da una posizione iniziale **M** qualsivoglia, e si fa variare secondo una legge arbitraria, in modo ch' esso generi una superficie sviluppabile circoscritta, la relativa polonormale descriverà, in generale, una superficie gobba. Ma v'hanno per ogni data posizione iniziale del piano tangente (e quindi per ogni dato punto delle superficie proposte) due direzioni, per ciascuna delle quali la polonormale del piano tangente mobile genera una superficie sviluppabile. Variando secondo queste *due direzioni principali,* il piano tangente genera due superficie sviluppabili, circoscritte alla data, tali che le loro caratteristiche, situate nel comune piano tangente **M**, sono vedute dal centro O sotto angolo retto. Chiameremo *principali* sì le due or accennate superficie sviluppabili, che le loro caratteristiche.

Quindi in ogni piano **M** tangente alla superficie abbiamo queste tre rette, degne di nota: la polonormale, e le due caratteristiche principali. Queste due ultime passano pel punto di contatto del piano tangente : tutte e tre insieme poi determinano col centro O una terna di piani ortogonali, i quali sono i piani principali comuni ai coni che hanno il vertice O, e che passano rispettivamente per le sezioni fatte dal piano **M** ne'tre cilindri congiunti. Ossia :

In un piano tangente qualunque d'una superficie di second'ordine, la polonormale e le caratteristiche principali formano un triangolo coniugato comune alle tre coniche, secondo le quali il piano tangente sega i tre cilindri congiunti. Le rette, che uniscono i vertici di questo triangolo al centro della superficie, sono gli assi principali comuni ai tre coni che, avendo il vertice al centro anzidetto, hanno per basi quelle coniche.

Ogni piano condotto pel raggio vettore, che va al punto di contatto del piano tangente, sega uno di questi coni secondo due generatrici egualmente inclinate al raggio vettore; dunque:

Se una retta tangente ad una superficie di second'ordine incontra un cilindro congiunto in due punti, le rette condotte da questi al centro della superficie data formano angoli eguali col raggio vettore che va al punto di contatto della retta tangente.

Al penultimo teorema può darsi anche quest'enunciato:

Se per la polonormale e per le caratteristiche principali di un piano tangente qualunque di una superficie di second'ordine si conducono tre piani paralleli ad uno stesso asse della superficie, questi piani saranno coniugati rispetto al cilindro congiunto parallelo a quell'asse.

Ed inoltre:

Se la superficie data è un iperboloide ad una falda, i piani condotti pel centro e per due generatrici poste in uno stesso piano tangente sono i piani ciclici comuni ai tre coni aventi il vertice al centro e per basi le tre coniche nelle quali il piano tangente sega i tre cilindri congiunti della superficie data.

24. I precedenti teoremi si riferiscono ad un piano tangente; quello che segue risguarda un piano trasversale qualsivoglia.

Se un piano qualunque sega una data superficie di second'ordine, ed i suoi cilindri congiunti, le sezioni risultanti sono vedute dal centro della data superficie secondo coni omociclici. Per conseguenza *ogni piano tangente comune a due di questi coni li tocca secondo due rette ortogonali.*

Da cui segue immediatamente:

Se un cono concentrico ad una superficie di second'ordine la sega in una conica piana, i piani principali di quello determinano sul piano della sezione tre rette tali, che i piani condotti per esse parallelamente ad un cilindro congiunto sono coniugati rispetto a questo cilindro medesimo.

Il precedente teorema può anche enunciarsi così:

Data una superficie di second'ordine, se in un piano qualunque si determina quel triangolo che è coniugato rispetto alla superficie e che col centro di questa forma tre piani ortogonali, i piani condotti pei lati di esso parallelamente ad un cilindro congiunto sono coniugati rispetto a questo cilindro.

Ha luogo anche la seguente proprietà:

Il piano di un triangolo veduto dal centro di una data superficie di second'ordine sotto angoli retti, un vertice del quale scorra sulla superficie data, mentre gli altri due vertici scorrono sui due cilindri congiunti reali, inviluppa una sfera avente per diametro il diametro della superficie data parallelo al cilindro congiunto immaginario.

Se il piano trasversale passa pel centro della data superficie, il primo teorema del presente numero diviene:

Ogni piano diametrale d'una superficie di second'ordine sega questa ed i cilindri congiunti secondo coniche aventi le stesse linee congiunte.

25. Passo ora ad esporre alcune proprietà segmentarie.

Se una retta condotta pel centro di una superficie di second' ordine incontra questa in m *ed un cilindro congiunto in* n, *la quantità*

$$\left(\frac{1}{Om}\right)^2-\left(\frac{1}{On}\right)^2$$

è costante, qualunque sia la direzione della trasversale; ed invero è eguale all'inverso quadrato del semidiametro della superficie data, parallelo a quel cilindro.

26. Se consideriamo uno de'cilindri congiunti ad una superficie di second'ordine, le rette polari delle sue generatrici, relativamente alla superficie data, sono nel piano principale perpendicolare al cilindro e inviluppano una conica, i cui assi coincidono in direzione con quelli della conica base del cilindro stesso. Data una generatrice del cilindro, il piede della quale sul piano principale sia i, conducasi in i la tangente alla base del cilindro. Su questa tangente prendasi un punto t in modo che i raggi vettori Oi, Ot siano ortogonali. Allora la retta polare della generatrice passerà per t.

Immaginiamo ora la *conica focale* o *eccentrica* situata nel piano principale che si considera; gli assintoti di essa siano incontrati dalla polare della generatrice ne'punti p, q. I raggi vettori Op, Oq incontrino in p', q' un piano tangente M qualsivoglia della superficie data. Sia N il piano tangente al cilindro lungo la generatrice immaginata; e la retta condotta per O, centro della superficie data, normalmente al piano determinato da O e dall'intersezione dei piani, M, N, incontri questi due piani in m, n. Allora la quantità:

$$\left(\frac{1}{Om}-\frac{1}{On}\right)^2:\left(\frac{1}{Op'}-\frac{1}{Op}\right)\left(\frac{1}{Oq'}-\frac{1}{Oq}\right)$$

rimane costante, comunque siano scelti i piani M, N. Ossia:

Assunti ad arbitrio un piano tangente M *di una superficie di second'ordine ed un piano tangente* N *di un suo cilindro congiunto, e trovati i due punti* p , q *in cui gli assintoti della conica focale, situati nel piano principale perpendicolare al cilindro, sono incontrati dalla retta polare della generatrice di contatto del piano* N, *rispetto alla superficie data; se i raggi vettori condotti dal centro* O *di questa ai punti* p, q *incontrano il piano* M *in in* p′, q′; *e se la perpendicolare condotta per* O *al piano vettore della retta intersezione di* M, N *incontra questi piani in* m, n ; *la quantità*

$$\left(\frac{1}{Om}-\frac{1}{On}\right)^2 : \left(\frac{1}{Op'}-\frac{1}{Op}\right)\left(\frac{1}{Oq'}-\frac{1}{Oq}\right)$$

è costantemente eguale al prodotto dell'inverso quadrato del semiasse della data superficie parallelo al cilindro considerato, moltiplicato per la differenza dei quadrati degli altri due semiassi.

Questo teorema, se vuolsi che gli elementi in esso considerati siano tutti reali, non può riferirsi che al cilindro perpendicolare a quel piano principale che contiene la focale iperbolica. Per l'altro cilindro, può darsi al teorema quest'altro enunciato :

Assunti ad arbitrio un piano M *tangente ad una superficie di second'ordine, ed un piano* N *tangente ad un cilindro congiunto, e condotto il piano* P *per la polare della generatrice di contatto di questo cilindro e pel punto in cui il piano* M *incontra un assintoto della focale iperbolica; se la perpendicolare condotta pel centro* O *della data superficie al piano vettore della retta intersezione di* M, N *incontra questi piani in* m, n; *e se la perpendicolare condotta per* O *al piano vettore della intersezione di* M, P *incontra questi piani in* m′, p ; *la quantità*

$$\left(\frac{1}{Om}-\frac{1}{On}\right) : \left(\frac{1}{Om'}-\frac{1}{Op}\right)$$

è costante, comunque siano scelti i piani M , N.

Il primo enunciato è stato ricavato, mediante la trasformazione polare, dal teorema fondamentale della memoria del sig. Amiot (t. 8.° del giornale di *Liouville*). L'altro enunciato fu dedotto collo stesso mezzo, da un teorema dimostrato nell'eccellente opera di Plücker : *System der Geometrie des Raumes* (2ª edizione Düsseldorf, 1852; pag. 292).

27. Gli assintoti della focale iperbolica hanno un'altra interessante proprietà che si connette con quelle de'cilindri congiunti.

Abbiamo già veduto che due piani tangenti qualsivogliano di un cilindro congiunto sono i piani d' omologia per la superficie data e per una superficie di rotazione avente un fuoco nel centro della data e per relativo piano direttore il piano delle due generatrici di contatto del cilindro. Or bene : *i centri d'omologia per tali*

superficie sono situati negli assintoti della focale che è nel piano perpendicolare al cilindro. Ossia :

Due punti presi ad arbitrio rispettivamente sugli assintoti della focale iperbolica di una data superficie di second'ordine sono i vertici di due coni inviluppanti simultaneamente la superficie data ed una superficie di rotazione avente un fuoco nel centro della data. Queste due superficie si segano in due coniche, i cui piani toccano il cilindro congiunto perpendicolare al piano della focale iperbolica.

I piani tangenti ad una superficie di second'ordine ne'quattro punti in cui questa è incontrata dagli assintoti della focale iperbolica sono tangenti anche al cilindro congiunto perpendicolare al piano della focale, e sono i limiti di separazione fra i piani tangenti di questo cilindro che segano e quelli che non segano la superficie data.

Questi quattro piani tangenti, che sono reali soltanto per l'ellissoide e per l'iperboloide a due falde, posseggono le proprietà polari reciproche degli ombelichi.

Proprietà di più superficie di second'ordine aventi gli stessi cilindri congiunti.

28. Data una superficie di second'ordine:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$$

l'equazione generale di tutte le superficie aventi in comune con essa i cilindri congiunti, ossia l'equazione generale delle superficie congiunte colla data è :

$$(1) \qquad (a + \omega)x^2 + (b + \omega)y^2 + (c + \omega)z^2 - 1 = 0$$

onde tutte quelle superficie hanno in comune, oltre i piani principali, anche le direzioni dei piani ciclici. Ciò si può esprimere dicendo :

I coni assintotici di più superficie congiunte sono omociclici.

Dall'esame dell'equazione (1) facilmente si desume che tutte le superficie congiunte ad una data si dividono in tre gruppi : ellissoidi, iperboloidi ad una falda, iperboloidi a due falde. Due superficie qualunque non hanno alcun punto reale comune. Gli ellissoidi sono tutti situati entro il cilindro ellittico congiunto. Questo è circondato dagli iperboloidi ad una falda che sono tutti disposti fra le superficie convesse de'due cilindri congiunti. Finalmente le due falde del cilindro iperbolico contengono nella loro concavità le due falde di ogni iperboloide non rigato. Dunque il cilindro ellittico separa gli ellissoidi dagli iperboloidi ad una falda: ed il cilindro iperbolico divide questi dagli iperboloidi a due falde. Ossia :

Data una superficie di second'ordine e per conseguenza dati anco i suoi due cilindri congiunti (reali), per un punto qualunque dello spazio si può sempre far passare una, ed una sola, superficie (reale) congiunta alla data. Tale superficie è

un ellissoide o un iperboloide ad una falda o un iperboloide a due falde, secondo che quel punto si trova o dentro il cilindro ellittico, o fra le superficie convesse de'due cilindri, o entro il concavo del cilindro iperbolico.

Gli ellissoidi hanno tutti l' asse maggiore parallelo al cilindro ellittico, e l' asse medio parallelo alle generatrici del cilindro iperbolico. La serie degli ellissoidi comincia dal punto che è centro comune di tutte le superficie e può risguardarsi come un'ellissoide di dimensioni nulle, e finisce col cilindro ellittico, il quale si può considerare come un ellissoide avente un asse infinito.

Ciascun iperboloide rigato ha l'asse immaginario parallelo alle generatrici del cilindro ellittico, e il maggior asse reale parallelo alle generatrici del cilindro iperbolico. La serie degli iperboloidi ad una falda comincia col cilindro ellittico e finisce col cilindro iperbolico.

Ogni iperboloide a due falde ha gli assi immaginari rispettivamente paralleli alle generatrici de'due cilindri congiunti. La serie degli iperboloidi a due falde comincia col cilindro iperbolico e prosegue indefinitamente, senza limite reale.

29. Un piano qualunque:

$$tx + uy + vz + 1 = 0$$

tocca la superficie (1), purchè sia soddisfatta la condizione:

$$\frac{t^2}{a+\omega} + \frac{u^2}{b+\omega} + \frac{v^2}{c+\omega} = 1$$

equazione cubica in ω, avente tre radici sempre reali, l'una maggiore di $-c$, la seconda compresa fra $-c$ e $-b$, la terza compresa fra $-b$ e $-a$. Dunque:

Un piano qualunque tocca sempre tre superficie congiunte ad una data: un ellissoide e due iperboloidi di specie diversa.

Siano λ, μ, ν le tre radici dell'equazione cubica in ω, cioè i parametri delle tre superficie toccate dal piano proposto; abbiamo:

$$(a-b)(a-c)t^2 = (a+\lambda)(a+\mu)(a+\nu)$$

$$(b-c)(b-a)u^2 = (b+\lambda)(b+\mu)(b+\nu)$$

$$(c-a)(c-b)v^2 = (c+\lambda)(c+\mu)(c+\nu).$$

Evidentemente le λ, μ, ν si ponno assumere come *coordinate ellittiche tangenziali* nello spazio. Le formole precedenti servono per passare dalle coordinate tangenziali di Plücher t, u, v alle nuove.

30. I tre punti, in cui un piano arbitrario tocca tre superficie congiunte ad una data, godono di questa importante proprietà:

Un piano qualunque tocca tre superficie congiunte ad una data in tre punti che uniti al centro di questa determinano tre rette ortogonali. Inoltre, *le rette che uni-*

scono a due a due i punti di contatto sono, per ciascuna delle tre superficie toccate, la polonormale e le due caratteristiche principali, corrispondenti al piano tangente comune.

Dunque :

Se più superficie congiunte sono segate da un piano qualsivoglia in altrettante coniche, queste sono vedute dal centro comune delle superficie sotto coni omociclici. Gli assi principali di questi coni incontrano il piano dato ne' punti ove questo tocca tre delle superficie congiunte; e i piani ciclici dei medesimi coni passano per le generatrici, poste nel piano dato, dell'iperboloide rigato che è una di queste tre superficie.

Rammentando che cosa intendiamo per superficie sviluppabile *principale* circoscritta ad una data superficie qualsivoglia, segue dai precedenti teoremi :

I piani tangenti comuni a due superficie di second'ordine, congiunte, di specie diversa, formano una superficie sviluppabile circoscritta che è principale per entrambe le date. Questa sviluppabile ha tre coniche di stringimento ne' piani principali, e la quarta conica all'infinito.

Per ottenere tutte le sviluppabili circoscritte principali di una data superficie di second'ordine, basta combinar questa con tutte le superficie ad essa congiunte, di specie diversa.

È visibile la correlazione fra le proprietà delle sviluppabili circoscritte principali e quelle delle linee di curvatura.

31. Parecchie proprietà, da noi enunciate, rispetto al sistema di una superficie di second'ordine e di un suo cilindro congiunto, non sono che casi particolari di teoremi più generali relativi al sistema di due o più superficie congiunte. Per esempio, il penultimo enunciato del n.° 24 è compreso nel seguente teorema :

Il piano di un triangolo, i cui vertici scorrano rispettivamente su tre superficie di second'ordine congiunte, e siano veduti dal centro comune di queste sotto angoli retti, inviluppa una sfera concentrica alle superficie date. L'inverso quadrato del raggio di questa sfera è eguale alla terza parte della somma algebrica degl' inversi quadrati de' semiassi delle superficie date.

Il primo teorema del n.° 19 è in un certo senso, generalizzato nel seguente :

Date due superficie di second'ordine congiunte e due piani tangenti della prima, questi segano la seconda in due coniche, per le quali si può far passare una superficie di second'ordine, avente un punto focale nel centro delle date, e per relativi piani direttori i piani tangenti alla prima superficie, condotti per la retta che unisce i punti di contatto de' piani dati.

Se i piani dati sono paralleli si ha :

Date due superficie di second'ordine congiunte, e due piani paralleli tangenti

alla prima di esse, questi segano la seconda in due coniche per le quali passa un cono avente il vertice nel centro delle superficie date, e per piani ciclici i piani tangenti alla prima superficie condotti pel diametro che unisce i punti di contatto de'piani dati.

Così il teorema del n.° 25 è un caso del seguente :

In due superficie congiunte, la differenza degl' inversi quadrati di due semidiametri nella stessa direzione è costante.

Da cui segue :

Quando un ellissoide ed un iperboloide hanno gli stessi cilindri congiunti, il primo è incontrato dal cono assintotico del secondo in punti che sono ad egual distanza dal centro comune delle superficie.

Dimostrasi facilmente anche questa proprietà :

Quando due superficie di second'ordine sono congiunte, se una retta parallela ad un asse incontra una superficie in un punto e l'altra in un altro, i raggi vettori corrispondenti fanno con quell' asse angoli i cui seni sono inversamente proporzionali ai diametri delle superficie diretti secondo l'asse medesimo.

32. È nota l' importanza del teorema d' Ivory relativo ai punti *corrispondenti* nelle superficie omofocali. Ecco le proprietà correlative nelle superficie congiunte.

Date due superficie congiunte, della stessa specie, chiameremo *corrispondenti* due punti appartenenti rispettivamente ad esse, quando le loro coordinate parallele agli assi principali sono ordinatamente proporzionali ai semidiametri diretti secondo questi assi. E diremo *corrispondenti* anche i piani tangenti ne'punti corrispondenti.

In due superficie congiunte, della stessa specie, la differenza dei quadrati inversi delle distanze di due piani corrispondenti *dal centro comune è costante.* Questo valor costante è la differenza de' quadrati inversi di due semidiametri nella stessa direzione.

Il prodotto delle distanze del centro comune di due superficie congiunte da due piani tangenti rispettivamente ad esse, moltiplicate pel coseno dell'angolo da questi compreso, è eguale all'analoga espressione relativa ai piani corrispondenti.

Se due superficie congiunte della stessa specie sono rispettivamente toccate da due piani, e se pel centro comune O *si conduce la perpendicolare al piano vettore della retta intersezione de'due piani tangenti, la quale li incontri ne'punti* p, q, *l'espressione*

$$\frac{1}{\overline{Op}} - \frac{1}{\overline{Oq}}$$

sarà eguale all'analoga relativa ai piani corrispondenti de'due dati.

33. La forma dell'equazione (1) mostra che *più superficie di second' ordine*,

aventi i medesimi cilindri congiunti, sono circoscritte ad una stessa curva immaginaria del quart'ordine, a doppia curvatura, per la quale passano tre cilindri di second'ordine (i tre cilindri congiunti), uno de' quali è immaginario, ed un cono immaginario di second'ordine, il quale è il cono assintotico di una sfera qualunque concentrica alle date superficie. Onde segue che *quella curva gobba immaginaria è projettata sopra due piani principali delle date superficie in coniche reali (ellisse ed iperbole) e sul piano all'infinito in un cerchio immaginario.*

Dunque :

Un sistema di superficie di second'ordine, aventi gli stessi cilindri congiunti, gode di tutte le proprietà ond'è dotato un sistema di superficie di second'ordine passanti per una stessa linea a doppia curvatura del quart'ordine.

Di qui segue, a cagion d'esempio, che :

I piani polari di uno stesso punto arbitrario, relativamente a più superficie congiunte, passano per una stessa retta r. *Questa è la polonormale relativa a quel punto ed alla superficie congiunta che passa per esso. Se il polo percorre una retta* l, *la retta* r *genera un iperboloide passante pel centro delle date superficie e contenente le polari della retta* l. *Il cono assintotico di quest'iperboloide ha tre generatrici rispettivamente parallele agli assi delle superficie date.*

Se la retta l *si muove in un piano* P, *il relativo iperboloide passa costantemente per una cubica gobba che contiene il centro delle date superficie ed ha gli assintoti, rispettivamente, paralleli agli assi di queste.*

Questa cubica gobba è anche il luogo dei poli del piano P *relativi alle superficie congiunte. Essa incontra il piano ne'punti in cui questo tocca tre di quelle superficie.*

Tale curva ha tre rami, ciascuno dotato di due assintoti (*). Il ramo che passa pel centro delle superficie congiunte ha gli assintoti, rispettivamente paralleli alle generatrici dei cilindri congiunti immaginario ed ellittico. La porzione di esso ramo che dal centro si stende accostandosi all'assintoto parallelo al cilindro ellittico contiene i poli (del piano P) relativi agli ellissoidi del dato sistema. L' altra porzione dello stesso ramo contiene i poli relativi a superficie immaginarie.

Il secondo ramo, che ha gli assintoti rispettivamente paralleli alle generatrici de' cilindri congiunti ellittico ed iperbolico, contiene i poli relativi agli iperboloidi ad una falda.

Il terzo ramo, che ha gli assintoti rispettivamente paralleli alle generatrici de'cilindri congiunti iperbolico ed immaginario, contiene i poli relativi agli iperboloidi a due falde.

(*) Vedi la mia memoria : *Sur quelques propriétés des lignes gauches de troisième ordre et classe* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, tom. 58).

34. Una retta arbitraria incontra un sistema di superficie congiunte in punti formanti un' involuzione. Dunque *una retta non può toccare più che due superficie congiunte ad una data.*

I segmenti determinati da più superficie congiunte sopra una retta trasversale sono veduti dal centro di queste sotto angoli che hanno le stesse bissettrici. Le bissettrici passano pei punti in cui la trasversale tocca due superficie congiunte, cioè pei punti doppi dell' involuzione.

Questo teorema comprende in sè il secondo enunciato del n.° 23.

Le polonormali relative ai punti in cui una trasversale arbitraria incontra un fascio di superficie congiunte formano un iperboloide passante pel centro di queste superficie.

Se la trasversale è polonormale per una delle superficie congiunte l' iperboloide diviene un cono, e i piani tangenti condotti per i punti d'incontro della trasversale inviluppano un cono di quarta classe. E se la trasversale è parallela ad un asse delle date superficie, i piani tangenti formano un cono di second'ordine, il cui vertice è nel piano perpendicolare a quell'asse.

Tutte le polonormali che si ponno condurre in un dato piano trasversale ad un fascio di superficie congiunte inviluppano una conica toccata dai piani principali delle superficie date. I punti delle superficie medesime, a cui corrispondono quelle polonormali, sono nella cubica gobba, luogo dei poli del piano trasversale.

Se il piano trasversale è parallelo ad un asse principale delle superficie congiunte, le polonormali in esso situate si dividono in due gruppi. Le polonormali del primo gruppo sono parallele all'asse principale, e i punti delle superficie congiunte, cui esse corrispondono, sono in un'iperbole equilatera, posta nel piano principale perpendicolare a quell'asse, passante pel centro delle superficie date, ed avente gli assintoti paralleli ai due assi principali che sono in quel piano. Le polonormali del secondo gruppo passano per uno stesso punto posto nel piano principale (ov'è l'iperbole equilatera) e corrispondono a punti delle superficie congiunte poste sopra una retta perpendicolare al piano medesimo.

Tutte le polonormali che si ponno condurre da un punto dato ad un fascio di superficie congiunte formano un cono di second' ordine. I punti delle superficie medesime, a cui corrispondono quelle polonormali, sono nella retta, per la quale passano i piani polari del punto dato.

35. Finisco questa memoria, notando la seguente proprietà :

Date più superficie aventi gli stessi cilindri congiunti, uno stesso piano principale, quello cioè perpendicolare al cilindro iperbolico, contiene gli ombelichi di tutte quelle superficie : quattro per ciascuna, a due a due opposti al centro. Il luogo geometrico di due ombelichi opposti è una linea del terzo ordine, per la quale il centro è un flesso e

gli assi della sezione principale sono due assintoti; mentre il terzo assintoto, passante anch'esso pel centro è la traccia d'un piano ciclico: la tangente al flesso è perpendicolare a questa traccia. La curva consta di tre parti, cioè di due eguali rami iperbolici situati in due angoli opposti degli assi e di un terzo ramo, contenente i flessi, e avvicinantesi da bande opposte al terzo assintoto.

Il luogo dell'altra coppia di ombelichi è un'altra curva, analoga alla precedente, ma diversamente situata, essendo il suo terzo assintoto la traccia dell'altro piano ciclico; i primi due assintoti e il flesso al centro le sono comuni. I suoi rami iperbolici giacciono negli altri due angoli opposti degli assi.

Bologna, 12 dicembre 1860.



DISCORSO COMMEMORATIVO
SU GUSTAVO PIETRO LEJEUNE DIRICHLET
PRONUNCIATO
DA E. E. KUMMER.

(Continuazione e fine V. pag. 221.)



I lavori puramente analitici di Dirichlet sopra le serie infinite e gl'integrali definiti e sulle funzioni, che sotto tali forme si presentano, ebbero origine dallo studio della Fisica Matematica, e segnatamente della teorica del calore di Fourier. Nell'applicazione però di queste forme generali ai problemi fisici egli non poteva accontentarsi di servirsene come di mezzi spediti, ed un più intimo esame avendogli tosto mostrato mancare le medesime di rigorosa base scientifica, persino nei punti più importanti, fu ad assicurare siffatti fondamenti ch'ei diresse anzitutto il proprio lavoro. Le serie progredienti secondo i seni e coseni dei multipli di un'arco, adoperati col più grande successo da Fourier nella rappresentazione delle funzioni arbitrarie, che si presentano nella teorica del calore, avevano sino allora palesata la singolare proprietà di essere sempre convergenti in tutti i casi, ove la funzione a svilupparsi non diviene infinita; ma a ciò dimostrare in generale e rigorosamente non erano riesciti neppure gli sforzi di Cauchy. La via battuta da questo matematico, non meno celebre pel rigore che per la originalità dei metodi, cioè di considerare soltanto i rapporti di grandezza dei singoli termini delle serie suddette, e su di ciò stabilire le proprie conclusioni, non condusse alla vera conoscenza di questa astrusa proprietà, ma soltanto un po' dappresso alla medesima; perocchè la convergenza di tali serie in certi casi dipende anche dalla maniera particolare, nella quale i termini negativi trovansi sottratti dai positivi. Per siffatta ragione Dirichlet, risalendo all'idea primitiva della convergenza delle serie infinite, ricercò il limite cui tende la somma di un numero di termini, supponendo tal numero crescente all'infinito; questione ch'egli approfondò completamente, mediante l'esatta determinazione del valor limite di un integrale definito semplice, che, per le moltiplici applicazioni delle quali è suscettibile, venne d'allora in poi ascritto fra i fondamenti della teorica degl'integrali definiti.

Seguendo lo stesso metodo e cogli stessi mezzi Dirichlet trattò anche la questione più generale e complicata della convergenza dello sviluppo di una funzione arbitraria di due variabili indipendenti, ordinato secondo funzioni sferiche; la qual cosa si ridusse soltanto a sciegliere la espressione delle funzioni sferiche mediante integrali definiti, in guisa, che la somma di un numero inderminato dei primi termini di questo sviluppo, i cui coefficienti sono dati come integrali doppî, si presentò in modo sem-

plicissimo e sotto una forma, nella quale il limite suo potè essere facilmente determinato per mezzo del limite trovato di quell'integrale semplice.

Dirichlet trovò infondata in alcuni punti essenziali non solamente la teorica speciale di questi due modi di sviluppo in serie, ma anche la teorica generale delle serie infinite. Era bensì noto le serie divergenti non avere valori determinati, ma si applicarono sempre ancora in maniera troppo ingenua le regole e conclusioni valevoli per le serie finite, alle infinite, e non si era mai pensato, che perfino la regola più elementare, esprimente che una qualunque somma algebrica è indipendente dalla disposizione delle proprie parti, potesse cessare di essere esatta per somme costituite da un numero infinito di parti, insino a quando Dirichlet dimostrò esistere una classe di serie convergenti a termini positivi e negativi, che cambiano di valore e ponno benanche divenire divergenti, col solo cambiare l'ordine di successione dei termini. La cognizione più intima per tal modo acquistata circa la natura delle espressioni infinite divenne norma anche per la trattazione degli integrali definiti; giacchè l'osservazione di Dirichlet, applicata ad integrali multipli, i cui limiti superiori sieno infiniti, palesò esserci pure una intiera classe dei medesimi, nei quali cambiando l'ordine di successione delle integrazioni può cambiarsi affatto il valore.

Egli trattò la teorica generale degli integrali con speciale preferenza nelle proprie lezioni, formando coi risultati dapprima sparsi come particolarità un tutto coordinato, mediante ordine e metodi opportuni, e coll'esclusione dei sussidî non proprî di questa teorica. Arricchì inoltre questa disciplina della scoperta di un nuovo singolar metodo d'integrazione, la cui idea principale sta nel rendere i limiti, entro i quali debbonsi ristringere le integrazioni, varcabili, coll'introduzione di un fattore discontinuo, in guisa che invece dei dati se ne possano prendere altri qualsivogliano più discosti, ed in particolare anche infinitamente discosti, senza che il valore dell'integrale venga alterato. Nell'applicazione di questo metodo all'attrazione dell'Ellissoide ed alla determinazione del valore di un nuovo integrale multiplo, mostrò altresì potere il medesimo, destramente adoperato, condurre alla soluzione di certi problemi scabrosi per una via più facile che non gli altri metodi d'integrazione conosciuti.

Mentre si occupava di simili lavori analitici, non abbandonò mai tuttavia col pensiero i grandi problemi della sua disciplina prediletta, la teorica dei numeri, mai non cessò di meditare sul modo di risolverli. Nella sua mente anelante dovunque all'unità non potevano sussistere vicine queste due sfere di idee, senza ch' egli ne indagasse gl'intimi rapporti; ne quali cercò e trovò in effetto la conoscenza di alcune recondite proprietà dei numeri. Le sue applicazioni dell'analisi alla teorica dei numeri, che di qui presero origine: vanno distinte da tutti gli altri tentativi di tal sorta essenzialmente per ciò, che nelle medesime l'analisi è resa tanto utile alla teorica dei numeri, da non più fornire soltanto a caso risultamenti isolati, ma da condurre per necessità alle solu-

zioni di certi problemi dell'aritmetica d'indole più generale, ed ancora affatto inaccessibili per altre vie. Questi metodi di Dirichlet formano epoca per la teorica dei numeri come le applicazioni dell'analisi fatte da Cartesio per la geometria; e dovrebbero anche essere riconosciuti come creazione di una nuova disciplina matematica, al pari della geometria analitica, qualora non si estendessero soltanto a certe specie, ma egualmente a tutti i problemi della teorica dei numeri.

La prima applicazione, che Dirichlet fece del nuovo suo metodo, concerne il semplicissimo teorema : che ogni serie aritmetica, i cui termini non abbiano tutti un fattor comune, contiene infiniti numeri primi; teorema di grande importanza, pel suo carattere affatto elementare , in molte ricerche aritmetiche , e che in particolare era anche stato adoperato da Legendre, ma come un risultamento non provato, nella prima dimostrazione della legge di reciprocità quadratica da esso tentata. La singolare maniera, colla quale Eulero, dalla trasformazione di un prodotto contenente soltanto i numeri primi in una serie infinita divergente, conchiuse : il numero di tutti i numeri primi essere infinito, tal maniera fu per Dirichlet l'occasione d'applicazione più generale delle serie infinite e dei prodotti infiniti , e mentre cercava di ordinare convenientemente questi sussidî analitici per lo scopo della sua investigazione, giunse al teorema fondamentale del suo nuovo metodo, teorema che determina il limite di una serie generale di potenze di quantità positive decrescenti, l'esponente comune delle quali si approssimi al limite uno. L'applicazione alla dimostrazione del teorema sulla serie aritmetica richiede lo sviluppo di un determinato gruppo di prodotti infiniti in serie infinite, e si riduce quindi a dimostrare, che il prodotto di queste serie infinite diviene infinitamente grande, ove l'esponente comune a tutti i termini si approssimi al limite uno. E siccome il primo fattore di tale prodotto, in virtù del detto teorema fondamentale, diviene per necessità infinitamente grande, così altro non resta a mostrare se non che il prodotto di tutti gli altri fattori non può annullarsi. Sebbene queste serie infinite si possano sommare sotto forma finita mediante logaritmi ed archi circolari, nondimeno il completo svolgimento di questo punto importante, segnatamente pel caso in cui la differenza della serie aritmetica sia un numero composto, presentò difficoltà assai rilevanti, che Dirichlet non potè superare nella prima trattazione di tale ricerca se non per mezzo di considerazioni molto complicate ed indirette; però appunto siffatta difficoltà gli offerse l'occasione per una seconda applicazione dell'analisi alla teorica dei numeri, nella quale sta una delle più importanti e splendide scoperte di lui, la determinazione cioè del numero delle classi delle forme quadratiche per un determinante dato qualunque. La difficoltà della prima ricerca trovossi, mercè questa seconda, sciolta nel modo il più semplice; perocchè emerse di per se, quel prodotto non poter essere nullo, senza che parimenti lo sia il numero delle classi delle forme quadratiche.

La determinazione di questo numero di classi si fonda sulla considerazione della

somma doppiamente infinita, avente per termine generale l'unità divisa per una potenza di una forma quadratica, l'esponente della quale supponesi infinitamente prossimo all'unità. Questa somma, che si estende a tutti i valori numerici interi di entrambe le variabili indeterminate, con certe restrizioni, ed a tutte le forme non equivalenti dello stesso determinante, viene determinata per due vie differenti, considerando nell'una le forme da rappresentarsi di tutte quante le classi unitamente, nell' altra considerandole separatamente. Siccome la somma per ognuna di dette classi viene ad avere lo stesso valore, così la somma complessiva risulta eguale ad una fra le singole somme, moltiplicata pel numero delle classi. La forma sotto la quale per ultimo si presenta l'espressione così ottenuta del numero delle classi è essenzialmente diversa per determinanti negativi e per positivi, e palesa in entrambi i casi una connessione sorprendente fra il numero delle classi e parti affatto diverse della teorica dei numeri; vale a dire per determinanti negativi coi residui e non residui quadratici, e per determinanti positivi colle due soluzioni dell'equazione di Pell, segnalate più di tutte le altre, cioè della soluzione fondamentale contenente i numeri i più piccoli, e di quella proveniente dalla teorica della divisione del circolo, la quale fu presentata primieramente da Dirichlet in una breve memoria: intorno la soluzione dell' equazione di Pell mediante funzioni circolari. Il penetrare più addentro nelle relazioni, che questi argomenti, i quali sembrano affatto eterogenei, hanno col numero delle classi e fra loro, non potè d'allora in poi riuscire; perchè in generale non esiste ancora altro metodo, fuorchè quello di Dirichlet, atto a risolvere questioni sì difficili.

Sebbene la gloria di questa grande scoperta spetti al solo Dirichlet, in quanto egli l'attinse completamente dal proprio ingegno, non vuolsi tuttavia passare sotto silenzio una certa parte risguardante Jacobi e Gauss. Già alcuni anni prima Jacobi aveva piuttosto indovinato che trovato, mediante il confronto di certi teoremi concernenti la divisione del circolo e la composizione delle forme quadratiche, il numero delle classi per le forme, il cui determinante è un numero primo negativo, e l'aveva anche pubblicato, dappoichè una serie di esempî numerici calcolati confermarono la sua conghiettura. La qual cosa però dovette rimanere senza influenza sulla scoperta di Dirichlet, non potendo questi col proprio metodo aver di mira di dimostrare un determinato risultato sotto una forma preparata, ma unicamente di trovarlo, e propriamente in maniera che sulla forma di esso nulla affatto poteva essere preventivamente fissato. Gauss invece, siccome rilevossi dalle carte da lui lasciate, era già da più lungo tempo in possesso della completa espressione del numero delle classi per determinanti negativi, non punto trovata per induzione, ma verosimilmente col soccorso di un metodo analogo a quello di Dirichlet. Il non aver mai pubblicato tal risultato, come neppure una intiera serie di importantissime e brillantissime scoperte, fatte più tardi da Abel e da Jacobi, le quali rinvennersi nel suo scrittoio, sembra però essere do-

vuto non solo ad una inesplicabile singolarità di quest'uomo straordinario, ma eziandio a ciò, che i metodi da lui usati non hanno forse potuto soddisfarlo in tutti i punti, e ch'egli ha preferito dare nulla, anzichè qualche cosa di imperfetto.

Dirichlet estese l'applicazione del proprio metodo alla teorica delle forme quadratiche non solo al numero delle classi, sì bene anche a tutte le questioni affini, concernenti la divisione delle classi in specie ed ordini, e rese quindi accessibile per una nuova via la parte delle *disquisitiones arithmeticae* di Gauss la più interessante, ma la più difficile ad essere compresa in causa della difficoltà dei metodi. Dimostrò inoltre, come per la serie aritmetica, così, dietro principj simili, per le forme quadratiche il teorema, che per mezzo di ogni forma, della quale tre coefficienti non abbiano fattore comune, si rappresentano infiniti numeri primi.

Quando più tardi in una speciale memoria trattò la teorica delle forme quadratiche dal punto di vista, dal quale i coefficienti e le variabili della forma vengono considerati come numeri interi complessi, provenienti dalla decomposizione della somma di due quadrati in fattori immaginarj, ricavò, coll'applicazione del suo metodo alle medesime, ancora parecchi risultati nuovi e sorprendenti, fra i quali due specialmente di particolare importanza debbo qui segnalare, siccome quelli che schiudono più profonde vedute nelle più recondite proprietà delle forme dei gradi superiori. Il numero delle classi delle forme quadratiche a coefficienti complessi viene espresso mediante serie, sommabili non per funzioni circolari ma per funzioni di lemniscata, come pur troppo Dirichlet non ebbe a sviluppare completamente ma solo ad indicare; queste pertanto stanno alle soluzioni della corrispondente equazione di Pell, o più generalmente parlando alle unità, nello stesso rapporto delle funzioni circolari alle unità delle forme quadratiche non complesse. Siccome le forme qui considerate ponno anche essere raccolte come forme decomponibili del quarto grado a quattro variabili, così tale risultato accenna ad un legame intimo non ancora investigato fra certe forme di gradi superiori e funzioni analitiche determinate e propriamente periodiche trascendenti. In oltre Dirichlet ha trovato, che, nel caso particolare in cui il determinante sia un numero non complesso, il numero delle classi di queste forme quadratiche complesse consta di due fattori, i quali separatamente esprimono i numeri delle classe delle forme non complesse dello stesso determinante, l'uno pel determinante negativo, l'altro per il positivo. Siffatto esempio palesò per la prima volta la natura più generale di tali espressioni, che riscontrasi in tutti i numeri di classi delle forme di gradi superiori ottenuti in seguito, i quali cioè constano di due fattori numerici interi essenzialmente diversi, l'uno essendo soltanto determinato mediante le unità, l'altro invece mediante residui di potenza per rispetto al determinante.

Per quelle forme decomponibili di gradi superiori, i cui fattori lineari non contengono altre irrazionalità, fuorchè radici dell'unità d'indice primo, Dirichlet determinò il numero delle classi durante il suo soggiorno in Italia, ma nulla pur troppo pubblicò di simile lavoro.

Finalmente debbonsi qui pure ricordare i nuovi ed interessanti risultati, che Dirichlet ricavò dall'applicazione del suo metodo alla determinazione dei valori medî o leggi asintotiche per le funzioni numeriche intere, in apparenza progredienti senza niuna regola, le quali ovunque riscontransi nella teorica dei numeri. Essi risguardano la questione già precedentemente trattata da Eulero, Legendre e Gauss sulla frequenza, con cui si presentano i numeri primi nella serie naturale dei numeri; di più i valori medî indicati da Gauss del numero delle classi delle forme quadratiche, e del numero delle specie di esse; ed inoltre parecchie funzioni che si offrono negli elementi della teorica dei numeri relative ai divisori ed ai residui dei numeri. Ed appunto in questo genere di ricerche, alle quali la trattazione analitica sembra in modo affatto particolare appropriata, mirabilmente riuscì alle indefesse fatiche di Dirichlet di sostituire in molti casi ai metodi analitici altri puramente aritmetici, e di ottenere per tal via ancora parecchi nuovi e stupendi risultati, dei quali citerò solo il seguente, che nella divisione di un numero dato per tutti i numeri più piccoli, i residui minori della metà del divisore presentansi in media assai più frequentemente dei maggiori.

Le ricerche già menzionate, risguardanti certe forme di gradi superiori a più variabili, condussero Dirichlet alla teorica generale delle forme decomponibili di tutti i gradi, la quale è sostanzialmente identica alla teorica generale dei numeri complessi, introdotti da Gauss nella scienza. Ciò ch' egli pubblicò intorno a questo importante argomento è bensì ristretto ad alcune succinte comunicazioni, a mò di saggio, nei *Monatsberichten* della nostra Accademia, ma contiene ciò non ostante, oltre le idee direttive generali, anche la soluzione delle primarie fondamentali difficoltà; e segnatamente i teoremi circa le unità ed i punti principali per le loro dimostrazioni sono esposti in sì completa maniera, che questa parte della teorica potrebb'essere sviluppata pienamente a seconda dell' intendimento dell' autore. Qual rilevante profitto ne verrebbe alla scienza da una completa trattazione di siffatta teorica generale, si può già chiaramente desumere da quanto ne fornì Dirichlet; giacchè vi si ritrovano le più essenziali e belle proprietà delle relative teoriche speciali, in particolare anche delle forme quadratiche, le quali si presentano nella generalità corrispondente alla loro natura non in maniera più complicata, ma all'incontro in guisa che, purgate dalle determinazioni non essenziali che tengono a cosa speciale, ponno essere per la prima volta riconosciute nella loro vera semplicità e grandezza.

Le lezioni sulla teorica dei numeri, che Dirichlet pel primo introdusse in questa università ed in generale nelle università tedesche, gli diedero occasione di rivolgere cura speciale anche alle parti più elementari di tale disciplina, e segnatamente alla semplificazione dei metodi e delle dimostrazioni di Gauss. Fra i lavori di simil genere, ch'egli non solo comunicò verbalmente a suoi uditori, ma rese eziandio pubblici in altre occasioni ricorderò qui anzitutto le nuove trattazioni di due dimostra-

zioni di Gauss della legge di reciprocità quadratica. L'una concerne la prima dimostrazione data nelle Disquisizioni, la quale però anche nella trattazione chiara ed opportuna di Dirichlet rimane in semplicità al disotto di altre dimostrazioni di cotesto teorema, e non presenta altro vantaggio eccetto quello di richiedere soltanto sussidî spettanti alla teorica stessa dei residui quadratici. L'altra concerne la quarta dimostrazione di Gauss, desunta dalla somma di certe serie finite, delle quali si ottiene molto facilmente il valore assoluto, mentre tutta la difficoltà è posta nella determinazione del segno conveniente, difficoltà che Dirichlet superò mediante la somma di queste serie per integrali definiti. Inoltre devesi rimarcare particolarmente la nuova trattazione della dottrina della composizione delle forme quadratiche, pubblicata come scritto accademico d'occasione, in cui, penetrando nell'essenza dell'argomento e considerando in luogo delle forme i numeri da rappresentarsi con esse, ottenne nel modo il più semplice i teoremi, da Gauss non ricavati se non che mediante un' apparato di formole difficili a superarsi. Anche il lavoro già menzionato intorno la teorica delle forme quadratiche in numeri complessi può essere qui notato, a motivo che i metodi semplici del medesimo sono dovunque applicabili eziandio alle forme quadratiche ordinarie, e tiene ciò in pari tempo il posto di una esposizione sistematica semplice e ben fondata di questa teorica elementare. Finalmente spettano ancora a cotesto luogo le nuove dimostrazioni dei teoremi sul numero delle decomposioni dei numeri, in quattro ed in tre quadrati, e la riduzione generale delle forme quadratiche positive a tre variabili, effettuata pel primo da Seeber in maniera estremamente complicata. In generale nei metodi, coi quali Dirichlet in siffatti lavori semplificò e rese di più facile accesso la teorica dei numeri, si riconosce essere i medesimi sopratutto attinti dallo studio profondo delle teoriche più generali; laonde le dimostrazioni dei teoremi non poggiano sopra determinazioni speciali e fortuite, ma intieramente sulle proprietà essenziali delle rispettive idee della teorica dei numeri, e procurano così nella specialità anche la cognizione del generale.

I lavori di Dirichlet nel campo della Fisica matematica e della meccanica provennero in origine dalla teorica del calore di Fourier, la quale, come si è già osservato, fù parimenti la fonte de'suoi primi lavori analitici. Tuttavia non pubblicò che un sol lavoro concernente la teorica stessa del calore, cioè una soluzione rigorosa e semplice della questione già trattata da Fourier: determinare lo stato del calore in una verga infinitamente sottile, per le estremità della quale le temperature siano date come funzioni del tempo.

Più tardi preponderò in lui l'interessamento per le questioni sollevate, e le ricerche matematico–fisiche eseguite da Gauss, e scielse particolarmente ad argomento delle sue indagini la teorica delle forze agenti in ragione inversa dei quadrati delle distanze, su di che tenne anche speciali lezioni all'Università. Delle due memorie a ciò relative da lui pubblicate, l'una presenta la soluzione della questione : trovare la

densità di uno strato materiale infinitamente sottile, col quale si possa coprire una superficie sferica in guisa che il potenziale d'ogni suo punto abbia un valore dato e variabile in modo continuo; questione rispetto alla quale Gauss aveva dimostrato sussistere per ogni superficie una determinata soluzione, e tale soluzione per la superficie sferica essere anche eseguibile analiticamente. Il che si ridusse particolarmente ad esaminare per rapporto alla convergenza la espressione della densità sviluppata secondo funzioni sferiche, la quale discende facilmente dalla corrispondente espressione del valor dato del potenziale, convergenza non risultante immediatamente dalla già indicata memoria di Dirichlet sulla convergenza delle serie ordinate secondo funzioni sferiche, a motivo che la densità potrebbe anche essere quà e là infinitamente grande. La esatta disamina di questo punto conduce al risultato, che la convergenza della serie suddetta non si verifica in generale senza eccezione, ma che va anzi soggetta a certe condizioni, la non sussistenza delle quali trae seco in effetto la divergenza della serie. Il risultato finale poi, eseguendo le somme, viene tanto semplificato, da non richiedere altre operazioni non finite fuorchè una doppia integrazione. La seconda breve memoria, da ricordarsi, concerne il potenziale per se stesso, e contiene una nuova definizione del medesimo, in quanto Dirichlet dimostra, che la nota equazione fra i due coefficienti differenziali parziali, congiunta a certe condizioni della continuità e del finito, cui soddisfanno il potenziale ed i suoi coefficienti differenziali primi, determina quello in modo, che nessun' altra funzione analitica, fuori del potenziale stesso, soddisfa a tutte queste condizioni. Quindi ogni espressione trovata per un potenziale può essere provata e verificata, mediante differenziazione, *a posteriori*. Questa nuova maniera di definizione di funzioni analitiche per mezzo di condizioni di continuità fu dopo quel tempo elevata nell'analisi a principio dal Sig. Prof. Riemann, successore di Dirichlet in Gottinga, principio che già sin d'ora nei lavori di quello si mostrò straordinariamente fruttuoso, e che sembra essere destinato a formare un' epoca nuova nella via presa recentemente dalla scienza, di penetrare cioè nella soluzione de'propri problemi meno col calcolo che colle idee.

La ricerca della stabilità dell'equilibrio, nella quale Dirichlet pel primo dimostrò rigorosamente: ad ogni massimo della funzione delle forze corrispondere in effetto una posizione dell'equilibrio stabile, è trattata in senso analogo, e dappoichè in luogo delle regole analitiche per la determinazione dei massimi delle funzioni vien applicato soltanto il concetto primitivo del massimo, non solamente ne emerge la sussistenza generale senza eccezione, la qual essa mancava a tutte le dimostrazioni precedenti, ma ne ridonda anche una mirabile semplicità e chiarezza.

Nelle indagini sul movimento dei fluidi, Dirichlet diede il primo esempio di una integrazion effettivamente eseguita delle equazioni differenziali generali dell'Idrodinamica, pel caso, cioè, che in una massa fluida infinitamente grande, dapprima in ri-

poso, si muova una sfera verso una direzione costante per effetto di forze acceleratrici qualunque, e metta così in movimento il fluido stesso. E qui trova il rimarchevolissimo risultato, contrario alle ordinarie idee della resistenza dei fluidi, che la resistenza subita dalla sfera nel suo movimento non dipende propriamente dalla velocità, sì bene soltanto dall'aumento di essa, per guisa che, cessando di agire sulla sfera le forze acceleratrici, scompare anche la resistenza, e la sfera si muove nel fluido in linea retta con moto uniforme.

Infine debbesi qui ancora rammentare la memoria sopra un problema dell'Idrodinamica, la quale fù l'ultimo suo lavoro. Essa fornisce un'altro esempio di una integrazione delle equazioni generali dell'Idrodinamica non approssimata ma esatta, nella determinazione del movimento di un fluido, supposto che le singole particelle della massa mantengano sempre nel loro moto una certa condizione della affinità, e che la forma primitiva sia quella di un'ellissoide. Dirichlet dimostra che tale movimento è possibile in fatto, e che per tutta la sua durata il fluido conserva la forma di un' ellissoide col medesimo centro, ma con posizione e grandezza variabili degli assi principali. Nel caso particolare, ove trattisi di un'ellissoide di rotazione, le integrazioni si riducono tutte completamente a quadrature, ed il fluido fa oscillazioni isocrone, assumendo alternativamente la forma di un'ellissoide allungato e di uno accorciato.

Prima di abbandonare la considerazione dei lavori scientifici di Dirichlet per riprendere la descrizione della sua vita, debbo aggiungere una osservazione generale additata dal confronto dei lavori stessi con quelli di Jacobi. Questi due uomini essendosi contemporaneamente occupati per un quarto di secolo a sviluppare sempre più le scienze matematiche, e stretti da personale amicizia essendo stati fra loro in vivi rapporti scientifici, egli è fenomeno assai sorprendente che i loro scritti, sebbene più volte risguardanti gli stessi rami particolari, tuttavia quasi affatto non palesino punti d'immediato contatto. Gli argomenti speciali delle loro investigazioni, tolte poche insignificantissime eccezioni, sono assolutamente diversi, e riscontransi persino pochi esempi, che l'uno nelle proprie ricerche abbia approfittato dei risultati dell'altro. Siffatta mancanza però di relazioni fra i loro scritti non si può a sufficienza spiegare esclusivamente colla diversità dei punti di partenza e degli indirizzi de'loro studi e lavori matematici, ed ha piuttosto fondamento in ciò, che ambedue deliberatamente evitavano di entrare in quei campi, dove l'uno riconosceva la superiorità dell'altro, e che ambedue sforzavansi di fuggire persino l'apparenza di una rivalità.

La prima convenienza personale fra Dirichlet e Jacobi ebbe luogo nel 1829, allorchè questi si recò da Konisberga a Berlino, per visitare i congiunti e gli amici. Più davvicino appresero a conoscersi in un viaggio che assieme fecero per Halle e di là, in compagnia del Sig. W. Weber, per la Turingia; e siccome Jacobi passava sovente il tempo delle ferie in Berlino, così ebbero anche in seguito occasione di vie-

più stringere l'amicizia e le relazioni scientifiche. Quando poi Jacobi, preso da malattia pericolosa, dovette, per consiglio dei medici, affine di ristabilirsi, mettersi in viaggio per l'Italia in cerca di clima più mite, Dirichlet, già da tempo meditando un viaggio per quel paese, afferrò l'occasione di così passare un' inverno a Roma con Jacobi e partì con tutta la famiglia nell'autunno del 1843. Contemporaneamente passarono l'inverno in Roma i nostri colleghi Sigg. Steiner e Borchardt, ond'è che allora la matematica tedesca trovossi colà assai splendidamente e variamente rappresentata: Dirichlet rimase in Italia un'anno e mezzo, estendendo il suo viaggio anche alla Sicilia e passando l'inverno successivo in Firenze. Al ritorno trovò Jacobi in Berlino, dove infrattanto, ottenuto congedo da Konisberga, era stato chiamato per grazia e munificenza di S. M. il Re, affinchè, senza coprire posto determinato, potesse curare la salute, e vivere tutto per la scienza. Il comune interesse per la conoscenza del vero e per l'avanzamento delle scienze matematiche costituì la solida base dell'amichevole rapporto, in cui vissero qui assieme Jacobi e Dirichlet. Si vedevano ogni giorno e trattavano fra loro questioni scientifiche generali o speciali, delle quali l' arguta discussione presentava interesse sempre nuovo e vivo, precisamente per la diversità dei punti di vista d' onde risguardavano il campo intiero delle matematiche. Jacobi, il quale per la mirabile ricchezza dello spirito non meno che per la profondità delle indagini matematiche e lo splendore delle scoperte, sapeva dovunque farsi riconoscere come ben meritava, godeva allora fama assai più estesa che non Dirichlet, il quale non possedeva l'arte di farsi valere, ed i suoi scritti, concernenti soltanto i più difficili problemi della scienza, avevano un circolo meno esteso di lettori ed ammiratori. Questa sproporzione fra l'esterna riputazione e l'importanza scientifica di Dirichlet da nessuno era meglio conosciuta di quello che da Jacobi, e nessuno parimenti più di lui era atto e s'adoperava per distruggerla e procacciare all'amico anche in più estesi circoli la meritata estimazione. Devesi pure ascrivere principalmente all'opera di Jacobi, che Dirichlet sia stato conservato alla nostra Accademia, quando nel 1846 il governo di Baden disegnava acquistarlo all'Università di Heidelberg. Due lettere, da Jacobi dirette ad Alessandro di Humboldt ed a S. M. il Re in quella occasione, porgono in pochi tratti forti e veraci una immagine viva della grandezza scientifica di Dirichlet e della perdita irreparabile, che, coll'abbandono della nostra patria per parte sua, avrebbero subìto le scienze esatte in Prussia, l'Accademia, l' Università ed in particolare lo stesso che scriveva.

La minacciosa perdita, allora fortunatamente schivata, ci colpì nove anni dopo, in modo tanto più sensibile in quanto erano già spenti Jacobi e Gauss.

La Università di Gottinga, che per mezzo secolo aveva avuto la gloria di possedere il primo fra i matematici viventi, si adoperava calorosamente ad assicurarsi tal gloria anche per lo avanti col chiamare Dirichlet al posto di Gauss; onde si rivolse

tosto a lui colla domanda: se e con quali condizioni avrebbe accettato un'invito per colà. Dirichlet aveva qui una sfera d'attività, godeva in alto grado la venerazione de'suoi uditori, la stima e l'amore de'colleghi, ed era inoltre legato da stretti vincoli di famiglia. La sola cosa che gli rendesse desiderabile un cambiamento di posizione era, che, a motivo dell'insegnamento alla scuola militare, venivano sparpagliate le sue forze, le quali egli avrebbe volentieri dedicate del tutto alla università ed alla scienza. Era quindi suo vivo desiderio, di essere dispensato dalla carica presso la scuola militare, e di risarcire questa perdita nelle sue entrate per mezzo dell' Università. E siccome l'invito per Gottinga offrivagli l'occasione di raggiungere sicuramente nell'un modo o nell'altro il suo scopo, così alla domanda direttagli rispondeva, che avrebbe annuito alla chiamata ufficiale del regio governo annoverese, qualora sino al giungere di essa non fosse cambiata la sua posizione nel senso desiderato. I suoi amici, resi di ciò partecipi, non tralasciarono di informarne il R. Ministro, onde potesse provvedere in tempo a distornare dall'Università e dall'Accademia la perdita minacciante; ma il ministro di Raumer non volle tosto adottare una deliberazione, sì bene aspettare prima un passo ufficiale del regio governo di Annover. Il quale trasmetteva subito a Dirichlet l'invito formale, a mezzo del di lui amico, Sig. Prof. Weber di Gottinga, che lo recava in persona; ed allora, avendogli il Ministro di Raumer offerto più di quanto desiderava, per qui trattenerlo, era troppo tardi; perchè Dirichlet si teneva ormai vincolato dalla precedente dichiarazione, e nessun vantaggio o riguardo di sorta poteva valere a farlo risolvere altrimenti.

Nell'autunno del 1855 si traslocò a Gottinga. Quivi si accomodò a suo piacimento in una casa propria in amena posizione e con giardino, dove la quiete della piccola città, che non aveva più goduto dalla giovinezza, lo compensava sufficientemente dei conforti del vivere in città grande, come Berlino. Ivi pure rinvenne uomini di sentire pari al suo, ai quali potersi stringere più davvicino; e la di lui erudizione ed importanza scientifica, congiunte alla modestia ed onestà di carattere, gli procacciarono tosto quell' estimazione generale, che aveva goduto nella nostra città. Alla università non trovò invero un circolo di uditori così esteso come quello costà lasciato, ma la sua fama come istruttore non meno conosciuta della sua fama scientifica attrasse a Gottinga molti giovani aspiranti ad educazione superiore nelle matematiche; inoltre alcuni fra i più distinti docenti accademici divennero suoi zelanti uditori; sì che il successo delle sue lezioni era colà relativamente non minore di qui. Siccome poi anche le sue investigazioni matematiche, che gli stavano sempre sommamente a cuore, erano favorite dal maggior agio di cui godeva, perciò nella nuova posizione sentivasi assai soddisfatto.

Nell'estate del 1858, finite le lezioni, viaggiò per la Svizzera e fermossi a Montreux sul lago di Ginevra, non tanto per ricrearsi quanto per elaborare un discorso commemorativo su Gauss, da leggersi nella Società delle Scienze di Gottinga, ed una

memoria per la *Denkschriflten* della stessa. Verso il termine della suddetta memoria d'Idrodinamica fù colto improvvisamente da malattia acuta di cuore, e ritornato tantosto in seno alla famiglia a Gottinga, vi giunse mortalmente ammalato. Vero è che all'arte medica ed alle cure amorose de'suoi riuscì di stornare felicemente il momentaneo pericolo della vita, ma poteva appena rialzarsi qualche poco dal letto ed abbisognava ancora della più grande quiete di corpo e di spirito pel completo desiderabile ristabilimento, allorchè sua moglie colpita all'improvviso d'apoplessia dopo poche ore spirò, senza che a lui fosse stato possibile di vederla ancora una volta. Questo colpo inaspettato volse nuovamente in peggio la sua malattia, alla quale soccombette dopo gravi patimenti il 5 Maggio 1859.

Dirichlet era distinto per nobiltà di carattere come persona non meno che nella scienza per profondità e robustezza di mente. L'onestà, che riscontravasi in tutto il suo essere, e rifulgeva pura, inalterata in ogni sua azione, proveniva dalla elevata educazione morale della mente e del cuore, e perciò non tendeva all'onore esterno, sì bene soltanto al vero onore interno, di cui egli aveva in se stesso esatta e rigorosa misura. L'ambizione, che, aspirando alla estimazione esteriore, si appaga più dell'apparenza che della sostanza, eragli totalmente estranea. Anche le scientifiche onorificenze da parte delle corporazioni dotte, impartitegli profusamente, non erano da lui apprezzate se non quando vi scorgeva l'approvazione degl'intelligenti e degli esperti, rimanendo del resto senza influenza sul chiaro giudizio ch' egli formava con piena spregiudicatezza circa il merito de'suoi lavori.

Come nella scienza, così anche in tutta la sua vita, l'amore del vero era il fondamento morale de'suoi pensieri e delle sue azioni. Esso moderava in lui l'attività della fantasia, lo teneva immune da pregiudizi ed illusioni circa se stesso e facevagli trovare piena soddisfazione laddove soltanto poteva riuscire a cognizione esatta e sicura. La verità sotto forma simbolica poco s'attagliava all'indole sua; le verità poi, che si annunziano come risultati di speculazione filosofica, gli sembravano in generale sospette. Soleva dire della filosofia, esserne essenziale difetto che non avesse problemi insoluti, come la matematica; che quindi non fosse conscia di determinati confini, entro i quali avesse realmente investigata la verità, ed oltre i quali dovesse in prevenzione rassegnarsi a nulla sapere. Quanto più la filosofia pretendeva all' onniscenza, tanto meno credeva di poterle accordare verità perfettamente riconosciuta, sapendo per propria esperienza nel suo campo scientifico quanto sia difficile la cognizione del vero, e quale fatica e lavoro si richieda per promuoverla anche solo di un passo.

Una certa timidezza, propria di Dirichlet in gioventù, era divenuta in età più matura vera intima modestia, palesandosi poi anche in alcune circostanze come naturale imbarazzo, specialmente in ciò, che non compariva se non molto a malincuore in pubblico, non prendeva volentieri la parola nelle adunanze più grandi, e non te-

neva mai discorsi, ove non fosse dovere indeclinabile. In generale non spingevasi innanzi nè personalmente nè colle proprie viste e sentenze, ma era riservato anche laddove era richiesto del suo parere siccome esperto; poichè appunto in tali casi procedeva colla più grande scrupolosità, ed esternava determinato giudizio soltanto dopo completa ponderazione. Allo spirito suo diretto più alla cognizione che all'attività pratica era estraneo ogni desiderio di esterna influenza. Ed infatti nelle relazioni esteriori della vita non faceva mai valere altra influenza, se non quella che un'uomo nobile e di molti talenti esercita involontariamente ed immediatamente nei circoli cui appartiene.

Nei rapporti di società e d' amicizia Dirichlet dimostrò sempre la vera benevolenza, che è fondata nella generale estimazione della personalità umana e nel rispetto per le singolarità e convinzioni altrui. Aveva gli occhi aperti pei lati buoni degli altri, e preferiva cercar quelli anzichè trattenersi sulle debolezze e sui difetti, cui non prendeva mai ad oggetto di soddisfacente derisione, e non combatteva, se non quando svelavano mancanza di sentimenti onorati. La stessa benevolenza mostrava altresì nelle estese relazioni scientifiche coi più insigni e valenti matematici nazionali e stranieri, che intratteneva più volentieri personalmente che per iscritto, non aggradendogli lo scriver lettere, mentre visitava volentieri nei viaggi i suoi conoscenti, dai quali pure molte volte veniva visitato. Mostrò sempre pei lavori altrui viva partecipazione, conversando s'addentrava volentieri nei loro particolari interessi scientifici, e comunicando i punti di vista più elevati, donde risguardava le questioni che si presentavano, istruiva senza far sentire in nessun modo la superiorità della sua mente.

I migliori fra i più giovani matematici tedeschi furono quasi tutti uditori di Dirichlet, e lo stimavano non solo come maestro, a cui dovevano la miglior parte della loro educazione matematica, ma erangli eziandio vincolati da vero amore e venerazione. Quanto apprezzasse l'amore degli scolari, e come lo ritenesse per la più preziosa ricompensa della propria attività nell'istruire, l'espresse anche poco prima della morte in bella e degna maniera. Dopo uno degli ultimi gravi attacchi della malattia, sentendosi sollevato, esternò il desiderio di vedere ancora una volta uno de'suoi più cari amici e già suo discepolo; questi resone avvertito si portò immantinente presso di lui, ed ebbe la fortuna di vedere e discorrere coll'amato maestro per due giorni, duranti i quali la malattia erasi un po' rallentata. Alla partenza, Dirichlet gli disse: è vera soddisfazione l'essere professore, quando si acquista simile affetto.

Il successo de'suoi insegnamenti, esternamente desunto dal numero degli uditori, era così rilevante, massime negli ultimi tempi della sua operosità accademica; quale non può mostrarlo alcun maestro di matematica superiore nelle università tedesche. Di tale successo fù debitore non ad artifizî dialettici, nè al dono di una brillante comunicativa, ma unicamente all'intima chiarezza della sua mente, per la quale sapeva comprendere ed esporre nella loro semplice verità anche i più difficili argomenti.

In ciò non risparmiava agli uditori sforzi di pensiero, che fossero necessari alla completa intelligenza dell'argomento, bensì risparmiava a se ed a loro volentieri calcoli prolissi e richiedenti consumo di tempo , sostituendovi possibilmente semplici idee. L'effetto della sua istruzione misurato dall'abilità scientifica dei più giovani matematici, suoi scolari, e che a lui specialmente debbono la loro educazione matematica , non trova in generale riscontro che nella efficace attività di Jacobi, e può fors'anco stimarsi maggiore in quanto che Jacobi fondò una scuola matematica speciale , che precede seguendone lo spirito e le idee, mentre i discepoli di Dirichlet battono vie individualmente più disparate.

Il suo particolare indirizzo scientifico era sì strettamente legato coll' indole della mente e del carattere di lui, che non poteva divenire dote comune di una scuola. Non amava le vie della scienza molto battute e già appianate, ma si compiaceva invece di scegliere ad oggetto di meditazione e lavoro le principali difficoltà, che sogliono da quelle evitarsi, e quando le aveva approfondate, non si occupava di svolgere le conseguenze dei risultati ottenuti, ma da essi passava ad argomenti più profondi sino a che rinveniva nuove difficoltà da superare. I suoi scritti sono perciò poco estesi e per lo più consistono soltanto in brevi memorie, nelle quali tratta ed approfonda completamente determinati problemi della scienza. È particolarmente caratteristico pel suo indirizzo scientifico anche il perfetto rigore e l' evidenza dei metodi e delle dimostrazioni, con cui stabilisce i suoi risultati; proprietà, la quale invero non corisponde che ad un requisito essenziale della matematica, ma che tuttavia trovasi rare volte in tutta la sua purezza anche nei più grandi matematici; proprietà la quale particolarmente nel campo dell'analisi non fù realizzata che per opera di Gauss, e che d'allora in poi fù peranco sì poco generalizzata, che sino gli scritti di Jacobi ne mostrano diffetto in parecchi luoghi, diffetto che quest'ultimo riconobbe eziandio apertamente.

Che Dirichlet abbia mantenuto se ed i suoi scritti scevri da tali diffetti, debbesi principalmente ascrivere all' amore che gli era proprio per la verità chiara e perfettamente sicura , ed altresì al modo di lavorare ed alla cura con cui componeva i propri scritti. La chiarezza e precisione del pensare, e la forza straordinaria della memoria, onde aveva sempre in perfetta maniera presente ciò che avesse pensato ed investigato una volta, lo dispenzavano nel lavoro quasi del tutto dall'uso della penna. Non occorrevagli a tal'uopo ne quiete ne agiatezza particolare, potendo anzi proseguire le sue profonde speculazioni, col medesimo successo come al tavolo di lavoro, nelle passeggiate, nei viaggi, nei trattenimenti musicali, e generalmente in tutti i luoghi, dove non fosse obbligato egli stesso a parlare ed agire. Posso addurre ad esempio, che rinvenne la soluzione di un difficile poblema della teorica dei numeri , intorno a cui erasi indarno affaticato per lungo tempo, nella cappella Sistina in Roma, mentre ascoltava la musica pasquale, che ivi suol essere eseguita. Trovato che avesse risul-

tati importanti, rivolgeva la massima cura alla ricerca del metodo di deduzione più semplice e più conforme alla natura dell'argomento, coll'investigare da tutte parti le relazioni fra quelli e le proposizioni affini. Sol quando gli fosse ciò riescito procedeva all'elabarato in iscritto, alla qual cosa d'ordinario si decideva difficilmente, ma che poscia eseguiva colla maggiore accuratezza.

Dei resultati ottenuti da Dirichlet negli ultimi anni della sua vita, la scienza non potè fare acquisto che di pochi, troppo a lungo avendo egli differito a stenderli in iscritto. Fra le carte da esso lasciate non si trovò alcun manoscritto di matematica fuorchè la memoria d'Idrodinamica, poc'ansi apparsa nelle *Deukschriften* della Società di Gottinga, pubblicata dal Sig. Prof. Dedekind, a cui egli aveva affidato il compimento. Da quanto ebbe a partecipare occasionalmente a singoli amici, circa gli oggetti delle sue indagini, emerge, che fra l'altre cose aveva in mente sua terminata una completa teorica delle forme ternarie indeterminate di secondo grado, che inoltre eragli riuscito di spingere d'un intiero grado più avanti l'approssimazione delle leggi asintotiche per una specie di funzioni della teorica dei numeri, dalle quali dipende la determinazione del numero dei numeri primi, e che aveva trovato una dimostrazione matematicamente esatta della stabilità del sistema del mondo. Di una scoperta grande e di particolare valore, fatta negli ultimi tempi di sua vita, cioè di un metodo affatto nuovo e generale di trattazione e soluzione dei problemi di meccanica, non parlò che una volta nell'estate del 1858 con uno de'suoi amici, il Sig. Kronecker, col quale era nei più intimi rapporti di scienza e d'amicizia. In tale scoperta aveva anche riposto una importanza affatto speciale, e pregato il Sig. Kronecker di non parlare anticipatamente con alcuno. Laonde questi non comunicò a suoi amici, se non dopo la morte di Dirichlet, quanto aveva da lui appreso sull'argomento, segnatamente che siffatto metodo non consiste nel ridurre a quadrature le integrazioni delle relative equazioni differenziali, troppo limitato essendo tale mezzo, col quale Jacobi tentò ottenere la soluzione dei problemi meccanici; che anzi il suo processo consiste in una approssimazione per gradi, in cui ogni nuovo passo apre in pari tempo una veduta più completa ed esatta circa la natura dei movimenti determinati dalle condizioni della questione; finalmente che la teorica delle piccole vibrazioni porge un certo appoggio al ritrovamento di questo metodo.

Del rammarico per questa perdita della scienza, perdita che non potrà forse per lungo tempo ripararsi, e la cui grandezza si può abbastanza desumere dai presenti cenni, non voglio dir altro se non che ricordare le parole pronunziate dallo stesso Dirichlet nel discorso commemorativo di Jacobi intorno alle di lui opere non terminate: la morte strappandolo troppo presto al lavoro non concesse alla scienza sì grandi acquisti.

LA TEORICA DELLE FUNZIONI ELLITTICHE.

MONOGRAFIA

DEL PROF. ENRICO BETTI.

(Continuazione V. pag. 159).

PARTE SECONDA

FUNZIONI FRATTE.

1.

Il quoziente di due *emiseni*, gli argomenti dei quali differiscono di una data quantità costante, dà origine a una funzione fratta che indicheremo colla notazione f; cioè porremo:

$$f(z) = \frac{\text{A es}\,\frac{z}{a}}{\text{es}\left(\frac{a}{z} + b\right)} .$$

Determineremo la costante A in modo che sia:

$$(1) \qquad \lim_{z=\infty} \frac{f(z)}{z^b} = 1 .$$

Rammentando l'equazione (7) del n.º 1. P. I., avremo:

$$\lim_{z=\infty} \frac{f(z)}{z^b} = \frac{\text{A}}{a^b} \lim_{z=\infty} \frac{a^b}{z^b} \frac{\text{es}\,\frac{z}{a}}{\text{es}\left(\frac{z}{a} + b\right)} = \frac{\text{A}}{a^b} :$$

onde:

$$\text{A} = a^b ,$$

e

$$(2) \qquad f(z) = \frac{a^b\,\text{es}\,\frac{z}{a}}{\text{es}\left(\frac{z}{a} + b\right)} .$$

Per mezzo della equazione (6) del n.º 1. P. I, si ha:

$$(3) \qquad f(z+a) = \frac{z + ab}{z} f(z) ,$$

dalla quale, ponendo $a = \Delta z$, si deduce:

$$(4) \qquad \frac{\Delta f(z)}{f(z)} = \frac{b\Delta z}{z},$$

equazione alle differenze finite, analoga alla equazione differenziale:

$$\frac{dy}{y} = b\frac{dz}{z},$$

che definisce la potenza $y = z^b$.

L'equazioni (1) e (4) sono le caratteristiche delle $f(z)$ considerate come funzioni di una sola variabile z.

Infatti dalla equazione (4) presa sotto la forma (3) si ricava:

$$f(z) = \frac{z(z+a)\ldots.[z+(n-1)a]}{(z+ab)(z+ab+a)\ldots.[z+ab+(n-1)a]} f(z+na)$$

$$= \frac{\lim\limits_{n=\infty} n^{-\frac{z}{a}} \frac{z}{a}\left(\frac{z}{a}+1\right)\ldots. + \left(\frac{z}{a}+n-1\right)}{\lim\limits_{n=\infty} n^{-\frac{z}{a}-b}\left(\frac{z}{a}+b\right)\left(\frac{z}{a}+b+1\right)\cdots\left(\frac{z}{a}+b+n-1\right)} \lim_{n=\infty} \frac{f(z+na)}{(z+na)^b} \lim_{n=\infty}\left(\frac{z+na}{n}\right)^b;$$

onde, ponendo mente alla equazione (5) del n.° 1. P. I, si ottiene:

$$f(z) = a^b \frac{\mathrm{es}\,\frac{z}{a}}{\mathrm{es}\left(\frac{z}{a}+b\right)}.$$

Noi riteniamo a e b, e quindi anche a^b, come costanti. Se a si ritenesse variabile, per valori non interi di b, la funzione f cesserebbe di essere monodroma, e occorrerebbero altre considerazioni per la determinazione della medesima.

Quando b è un numero intero e reale n, sostituendo agli *emiseni* i loro valori espressi in prodotti infiniti e riducendo, si ottiene:

$$(5) \qquad f(z, a, n) = z(z+a)(z+2a)\ldots.[z+(n-1)a].$$

Mediante le formole (15) del n.° 2. P. I, si ottiene la moltiplicazione dell'argomento nelle funzioni $f(z)$, e si ha:

$$f(nz) = a^b \frac{\mathrm{es}\,\frac{nz}{a}}{\mathrm{es}\left(\frac{nz}{a}+b\right)} = n^b a^b \prod_0^{n-1}{}_t \frac{\mathrm{es}\left(\frac{z}{a}+\frac{t}{n}\right)}{\mathrm{es}\left(\frac{z}{a}+\frac{b}{n}+\frac{t}{n}\right)};$$

onde:

$$(6) \qquad f(nz, a, b) = n^b \prod_0^{n-1}{}_t f\left(z + \frac{at}{n}, a, \frac{b}{n}\right).$$

Le funzioni $f(z, a, b)$ considerate come funzioni di tre variabili sono note nell' Analisi sotto il nome di *facoltà analitiche*, e sono state soggetto dei lavori di molti geometri, tra i quali citerò una Memoria del Sig. *Weierstrass* pubblicata nel Vol. 51 del Giornale di Crelle.

2.

I tre quozienti, che si ottengono dividendo tre funzioni Jacobiane per la quarta, danno origine a tre funzioni fratte, per le quali adotteremo la notazione seguente:

$$(1) \qquad \operatorname{sn} z = \frac{\theta_{1,1}(z)}{\theta_{1,0}(z)}, \quad \operatorname{cn} z = \frac{\theta_{0,1}(z)}{\theta_{1,0}(z)}, \quad \operatorname{dn} z = \frac{\theta_{0,0}(z)}{\theta_{1,0}(z)}.$$

Jacobi le indicava colle notazioni senam z, cosam z, Δam z, e le esprimeva *seno amplitudine di z, coseno amplitudine di z, delta amplitudine di z*. Queste tre funzioni si chiamano funzioni *ellittiche*.

Le funzioni ellittiche sono tutte tre doppiamente periodiche. Infatti, rammentando le formule (4) e (5) del n.° 6. P. I. abbiamo:

$$(2) \qquad \operatorname{sn}(z + \omega) = -\operatorname{sn} z, \quad \operatorname{sn}(z + 2\omega) = \operatorname{sn} z,$$

$$(3) \qquad \operatorname{sn}(z + \omega') = \operatorname{sn} z,$$

$$(4) \qquad \operatorname{cn}(z + \omega) = -\operatorname{cn} z, \quad \operatorname{cn}(z + 2\omega) = \operatorname{cn} z,$$

$$(5) \qquad \operatorname{cn}(z + \omega') = -\operatorname{cn} z, \quad \operatorname{cn}(z + 2\omega') = \operatorname{cn} z,$$

$$(6) \qquad \operatorname{dn}(z + \omega) = \operatorname{dn} z,$$

$$(7) \qquad \operatorname{dn}(z + \omega') = -\operatorname{dn} z, \quad \operatorname{dn}(z + 2\omega') = \operatorname{dn} z.$$

Le quantità 2ω e $2\omega'$ sono periodi comuni a tutte tre le funzioni ellittiche.

Per mezzo dell'equazioni (16) del n.° 10. P. I, si esprimono le funzioni (1) per le $\Theta_{\mu,\nu}(z)$ nel modo seguente:

$$(8) \qquad \operatorname{sn} z = \frac{1}{i\sqrt{k}} \frac{\Theta_{1,1}(z)}{\Theta_{1,0}(z)}, \quad \operatorname{cn} z = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\Theta_{0,1}(z)}{\Theta_{1,0}(z)}, \quad \operatorname{dn} z = \sqrt{k'} \frac{\Theta_{0,0}(z)}{\Theta_{1,0}(z)}.$$

Dalla formola (10) del n.° 10. P. I, si deduce:

$$\Theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\omega}{2}\right) = e^{\frac{\nu\pi i}{2}} \Theta_{\mu+1,\nu}(z).$$

Quindi, rammentando l'equazione (8) dello stesso numero, l'equazioni (8) daranno:

$$(9)\qquad \operatorname{sn}\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=\frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z},$$

$$(10)\qquad \operatorname{cn}\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=-k'\frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{dn} z},$$

$$(11)\qquad \operatorname{dn}\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=\frac{k'}{\operatorname{dn} z}.$$

onde:

$$(12)\qquad \operatorname{sn}\left(\frac{\omega}{2}-z\right)=\frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z},\quad \operatorname{cn}\left(\frac{\omega}{2}-z\right)=k'\frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{dn} z},\quad \operatorname{dn}\left(\frac{\omega}{2}-z\right)=\frac{k'}{\operatorname{dn} z}.$$

Per analogia colle funzioni circolari, queste tre funzioni si chiamano *seno coamplitudine, coseno coamplitudine, delta coamplitudine di* z, e si scrivono:

$$(13)\qquad \operatorname{snc} z=\frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z},\qquad \operatorname{cnc} z=\frac{k'\operatorname{sn} z}{\operatorname{dn} z},\qquad \operatorname{dnc} z=\frac{k'}{\operatorname{dn} z}.$$

Dalla formula (10) del n.º 10. P. I. si ha:

$$\Theta_{\mu,\nu}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{4}\right)}\Theta_{\mu,\nu+1}(z)\ ;$$

onde, ponendo mente alla equazione (9) dello stesso numero, abbiamo dall'equazioni (8):

$$(14)\qquad \operatorname{sn}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{1}{k\operatorname{sn} z},$$

$$(15)\qquad \operatorname{cn}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{\operatorname{dn} z}{ik\operatorname{sn} z},$$

$$(16)\qquad \operatorname{dn}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{\operatorname{cn} z}{i\operatorname{sn} z}.$$

Dall'equazioni (5), (10), (11), (14), (15) e (16) si deduce che quando siano determinati i valori di tutte tre le funzioni ellittiche corrispondenti ai valori dell'argomento z che hanno gl'indici in un parallelogrammo elementare, i cui lati siano $\frac{\omega}{2}$ e $\frac{\omega'}{2}$ si hanno i loro valori in tutto il piano.

Dalle medesime si ricavano anche le seguenti formule:

$$(17)\qquad \operatorname{sn}\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\frac{\operatorname{dn} z}{k\operatorname{cn} z},$$

$$(18)\qquad \operatorname{cn}\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\frac{k'}{ik\operatorname{cn} z},$$

$$(19)\qquad \mathrm{dn}\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\frac{ik'\,\mathrm{sn}\,z}{\mathrm{cn}\,z}.$$

Osservando le formule (6) del n.° 5, e (7) del n.° 6. P. I, si ha:

$$(20)\qquad \mathrm{sn}\,0=0\,,\quad \mathrm{cn}\,0=1\,,\quad \mathrm{dn}\,0=1$$

e quindi dalle precedenti:

$$(21)\qquad \mathrm{sn}\frac{\omega}{2}=1\,,\qquad \mathrm{cn}\frac{\omega}{2}=0\,,\qquad \mathrm{dn}\frac{\omega}{2}=k'\,,$$

$$(22)\qquad \mathrm{sn}\frac{\omega'}{2}=\infty\,,\qquad \mathrm{cn}\frac{\omega'}{2}=\infty\,,\qquad \mathrm{dn}\frac{\omega'}{2}=\infty\,,$$

$$(23)\qquad \mathrm{sn}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\frac{1}{k},\quad \mathrm{cn}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\frac{k'}{ik},\quad \mathrm{dn}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=0.$$

Dall'equazioni (7) e (9) del n.° 8. P. I, si deducono le seguenti relazioni algebriche tra le tre funzioni ellittiche:

$$(24)\qquad \mathrm{sn}^2 z+\mathrm{cn}\,z=1\,,$$

$$(25)\qquad \mathrm{dn}^2 z+k^2\mathrm{sn}^2 z=1.$$

3.

Dividendo per la equazione (7) l'equazioni (10) e (11), (21) e (14), (17) e (16) del n.° 11. P. I, si ottengono per l'addizione degli argomenti le formule seguenti:

$$(1)\qquad \mathrm{sn}(z\pm w)=\frac{\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w\pm\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z}{1-k^2\mathrm{sn}^2 z\,\mathrm{sn}^2 w}\,,$$

$$(2)\qquad \mathrm{cn}(z\pm w)=\frac{\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{cn}\,w\mp\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{dn}\,z\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{dn}\,w}{1-k^2\mathrm{sn}^2 z\,\mathrm{sn}^2 w}\,,$$

$$(3)\qquad \mathrm{dn}(z\pm w)=\frac{\mathrm{dn}\,z\,\mathrm{dn}\,w\mp k^2\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{cn}\,w}{1-k^2\mathrm{sn}^2 z\,\mathrm{sn}^2 w}\,,$$

Dividendo l'equazioni (6), (8) e (9) per la (7) del medesimo numero, si ha:

$$(4)\qquad \mathrm{sn}(z+w)\,\mathrm{sn}(z-w)=\frac{\mathrm{sn}^2 z-\mathrm{sn}^2 w}{1-k^2\mathrm{sn}^2 z\,\mathrm{sn}^2 w}\,,$$

$$(5)\qquad \mathrm{cn}(z+w)\,\mathrm{cn}(z-w)=\frac{\mathrm{cn}^2 w-\mathrm{sn}^2 z\,\mathrm{dn}^2 w}{1-k^2\mathrm{sn}^2 z\,\mathrm{sn}^2 w}\,,$$

$$(6)\qquad \mathrm{dn}(z+w)\,\mathrm{dn}(z-w)=\frac{\mathrm{dn}^2 w-k^2\mathrm{sn}^2 z\,\mathrm{cn}^2 w}{1-k^2\mathrm{sn}^2 z\,\mathrm{sn}^2 w}\,,$$

Dall'equazioni (1), (4) e (6) del n.º 12. P. I. dopo averle divise per $\theta_{1,0}(z)$, si ottiene:

$$(7) \qquad \frac{d\,\mathrm{sn}\,z}{dz} = \mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z,$$

$$(8) \qquad \frac{d\,\mathrm{cn}\,z}{dz} = -\,\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{dn}\,z,$$

$$(9) \qquad \frac{d\,\mathrm{dn}\,z}{dz} = -\,k^2\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,z.$$

Ponendo nell'equazione (7) $\mathrm{sn}\,z = y$, ed osservando l'equazioni (24) e (25) del n.º 2, si ha:

$$(10) \qquad \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2).$$

Questa equazione differenziale e la proprietà di annullarsi per $z=0$ possono riguardarsi come le caratteristiche delle funzioni ellittiche $y = \mathrm{sn}\,z$.

Dall'equazione (10) si ricava:

$$(11) \qquad z = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

quindi $\mathrm{sn}\,z$ è il limite superiore di questo integrale che ne rende il valore eguale a z. La quantità z riguardata come funzione di y si chiama *amplitudine*, o anche *integrale ellittico di prima specie*.

Poichè $\mathrm{sn}\frac{\omega}{2} = 1$, avremo:

$$(12) \qquad \frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

ed essendo $\mathrm{sn}\frac{\omega+\omega'}{2} = \frac{1}{k}$, sarà:

$$\frac{\omega+\omega'}{2} = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}};$$

onde a cagione dell'equazione (12):

$$\frac{\omega'}{2} = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} - \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}.$$

Pongo:

$$y^2 = \frac{1 - k'^2 x^2}{k^2}$$

ed ottengo:

$$(13) \qquad \frac{\omega'}{2} = i \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k'^2 x^2)}}.$$

Pongo

$$(14) \qquad K = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}}, \quad K' = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k'^2 y^2)}},$$

ed ho:

$$(15) \qquad \omega = 2K, \quad \omega' = 2iK'.$$

Le funzioni ellittiche che hanno il modulo k reale e > 1, si esprimono semplicemente per quelle che hanno il modulo reale e < 1. Infatti dall'equazioni (14) del n.° 16. P. I, abbiamo:

$$(16) \qquad \mathrm{sn}\left(kz, \frac{1}{k}\right) = k\,\mathrm{sn}(z, k), \quad \mathrm{cn}\left(kz, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{dn}(z, k), \quad \mathrm{dn}\left(kz, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{cn}(z, k).$$

Le funzioni ellittiche che hanno l'argomento immaginario si esprimono per quelle che hanno l'argomento reale. Infatti dall'equazioni (19) dello stesso numero si ricava:

$$(17) \qquad \mathrm{sn}(iz, k) = \frac{i\,\mathrm{sn}(z, k')}{\mathrm{cn}(z, k')}, \quad \mathrm{cn}(iz, k) = \frac{1}{\mathrm{cn}(z, k')}, \quad \mathrm{dn}(iz, k) = \frac{\mathrm{dn}(z, k')}{\mathrm{cn}(z, k')}.$$

Per mezzo dell'equazioni (1), (2), (3), (16) e (17) di questo numero, le funzioni ellittiche che abbiano un argomento complesso $x + iy$, si esprimeranno per mezzo delle funzioni ellittiche dei due argomenti reali x ed y.

4.

Le derivate delle quattro funzioni Jacobiane sono anch'esse funzioni intere. Dividendole per le respettive loro primitive, avremo quattro nuove funzioni fratte, per le quali, scrivendo le derivate al modo di Lagrange, ed useremo la seguente notazione:

$$(1) \qquad Z_{\mu,\nu}(z) = \frac{\theta'_{\mu,\nu}(z)}{\theta_{\mu,\nu}(z)} = \frac{\Theta'_{\mu,,}(z)}{\Theta_{\mu,\nu}(z)}.$$

L'equazioni (8) e (9) del n.° 10. P. I daranno immediatamente:

$$(2) \qquad Z_{\mu+2r,\,\nu+2s}(z) = Z_{\mu,\nu}(z),$$

cioè: le $Z_{\mu,\nu}$ che hanno gli indici congrui rispetto al modulo 2, sono eguali.

L'equazione (10) dello stesso numero dà:

$$(3) \qquad Z_{\mu,\nu}\left(z + \mu' \frac{\omega}{2} + \nu' \frac{\omega'}{2}\right) = -\frac{\nu' \pi i}{\omega} + Z_{\mu+\mu',\,\nu+\nu'}(z).$$

Prendendo $\mu' = 2m$, $\nu' = 2m'$, ed osservando l'equazione (2), se ne deduce:

$$(4) \qquad Z_{\mu,\nu}(z + m\omega + n\omega') = -\frac{2m'\pi i}{\omega} + Z_{\mu,\nu}(z).$$

Per mezzo dell'equazione (3) si esprimono tre funzioni $Z_{\mu,\nu}$ per la quarta nel modo seguente:

$$(5) \qquad Z_{1,1}(z) = Z_{1,0}\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) + \frac{\pi i}{\omega},$$

$$(6) \qquad Z_{0,1}(z) = Z_{1,0}\left(z + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) + \frac{\pi i}{\omega},$$

$$(7) \qquad Z_{0,0}(z) = Z_{1,0}\left(z + \frac{\omega}{2}\right).$$

Quando μ e ν non sono ambedue congrui all'unità rispetto al modulo 2, essendo $Z_{\mu,\nu}(z)$ il quoziente di una funzione intera dispari divisa per una funzione intera pari, avremo:

$$(8) \qquad Z_{\mu,\nu}(0) = 0.$$

Poichè $Z_{1,1}(z)$ è il quoziente di una funzione intera pari divisa per una funzione intera dispari, sarà:

$$(9) \qquad Z_{1,1}(0) = \infty.$$

Ma dalla formula (3) del n.º 10. P. I, abbiamo:

$$Z_{1,1}(z) = \frac{\frac{d}{dz} \sum_0^\infty (-1)^n q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} \operatorname{sen}(2n+1)\frac{\pi z}{\omega}}{\sum_0^\infty (-1)^n q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} \operatorname{sen}(2n+1)\frac{\pi z}{\omega}};$$

onde:

$$zZ_{1,1}(z) = \frac{\sum_0^\infty (-1)^n (2n+1) q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} \cos(2n+1)\frac{\pi z}{\omega}}{\sum_0^\infty (-1)^n (2n+1) q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} \dfrac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\pi z}{\omega}}{(2n+1)\frac{\pi z}{\omega}}};$$

e quindi:

$$(10) \qquad \lim_{z=0} zZ_{1,1}(z) = 1.$$

Quando non sono contemporaneamente:

$$\begin{matrix}\mu\equiv 0\\ \nu\equiv 1\end{matrix}\ (\text{mod } z)$$

dalla equazione (3), osservando la equazione (8), si ricava:

$$(11)\qquad Z_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega}{2}\right)=0.$$

ed a cagione della equazione (10):

$$(12)\qquad \lim_{z=0} zZ_{0,1}\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=1.$$

Quando non sono contemporaneamente:

$$\begin{matrix}\mu\equiv 1\\ \nu\equiv 0\end{matrix}\ (\text{mod } 2)$$

si ha egualmente:

$$(13)\qquad Z_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega'}{2}\right)=-\frac{\pi i}{\omega},$$

e per $\mu=1$, $\nu=0$:

$$(14)\qquad \lim_{z=0} zZ_{1,0}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=1.$$

Analogamente si trova:

$$(15)\qquad Z_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=-\frac{\pi i}{\omega}$$

quando non siano:

$$\begin{matrix}\mu\equiv 0\\ \nu\equiv 0\end{matrix}\ (\text{mod } 2);$$

e

$$(16)\qquad \lim_{z=0} zZ_{0,0}\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=1.$$

Per mezzo dell'equazione (11) del n.° 13. P. I. si ottiene:

$$(17)\qquad Z'_{\mu,\nu}(z)=-\frac{\eta}{\omega}-k^2\,\text{sn}^2\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)$$

dalla quale abbiamo:

$$Z'_{\mu,\nu}(z+w)=-\frac{\eta}{\omega}-k^2\text{sn}^2\left(z+w+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)$$

$$Z'_{\mu,\nu}(z-w)=-\frac{\eta}{\omega}-k^2\text{sn}^2\left(z-w+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)$$

e sottraendo:

$$Z'_{\mu,\nu}(z+w) - Z'_{\mu,\nu}(z-w) = -k^2\left[\operatorname{sn}^2\left(z+w+(1-\mu)\frac{\omega}{2}-\nu\frac{\omega'}{2}\right)\right.$$

$$\left.-\operatorname{sn}^2\left(z-w+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\right].$$

$$= -\frac{4k^2\operatorname{sn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{cn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{dn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w}{\left[1-k^2\operatorname{sn}^2\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{sn}^2 w\right]^2}$$

Moltiplico per dw, ed integrando ottengo:

$$Z_{\mu,\nu}(z+w)+Z_{\mu,\nu}(z-w)=C-\frac{2\operatorname{cn}\left(z+(1+\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{dn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)}{\operatorname{sn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\left[1-k^2\operatorname{sn}^2\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{sn}^2 w\right]}$$

Pongo $w=0$ ed ho:

$$C = 2Z_{\mu,\nu}(z) + \frac{2\operatorname{cn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{dn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)}{\operatorname{sn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)}$$

onde:

$$(18)\qquad Z_{\mu,\nu}(z+w)+Z_{\mu,\nu}(z-w) = 2Z_{\mu,\nu}(z)$$

$$-\frac{2k^2\operatorname{sn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{cn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{dn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{sn}^2 w}{1-k^2\operatorname{sn}^2\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{sn}^2 w}.$$

Pertanto avremo per le quattro funzioni:

$$(19)\qquad Z_{1,0}(z+w)+Z_{1,0}(z-w) = 2Z_{1,0}(z) - \frac{2k^2\operatorname{sn} z\operatorname{cn} z\operatorname{dn} z\operatorname{sn}^2 w}{1-k^2\operatorname{sn}^2 z\operatorname{sn}^2 w},$$

$$(20)\qquad Z_{0,1}(z+w)+Z_{0,1}(z-w) = 2Z_{0,1}(z) - \frac{2k'^2\operatorname{dn} z\operatorname{sn} z\operatorname{sn}^2 w}{\operatorname{cn} z(\operatorname{cn}^2 z-\operatorname{dn}^2 z\operatorname{sn}^2 w)},$$

$$(21)\qquad Z_{0,0}(z+w)+Z_{0,0}(z-w) = 2Z_{0,0}(z) + \frac{2k^2k'^2\operatorname{sn} z\operatorname{cn} z\operatorname{sn}^2 w}{\operatorname{dn} z(\operatorname{dn}^2 z-k^2\operatorname{cn}^2 z\operatorname{sn}^2 w)},$$

$$(22)\qquad Z_{1,1}(z+w)+Z_{1,1}(z-w) = 2Z_{1,1}(z) + \frac{2\operatorname{cn} z\operatorname{dn} z\operatorname{sn}^2 w}{\operatorname{sn} z(\operatorname{sn}^2 z-\operatorname{sn}^2 w)}.$$

*

5.

Integrando l'equazione (17) del numero precedente nel caso di $\mu = 1$, $\nu = 0$, ed osservando che si ha $Z_{1,0}(0) = 0$, si ottiene:

$$(1) \qquad k^2 \int_0^z \mathrm{sn}^2 z \, dz = -\frac{\eta}{\omega} z - Z_{1,0}(z) .$$

Ponendo $\mathrm{sn}\, z = y$, si ha:

$$(2) \qquad k^2 \int_0^y \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-ky^2)}} = -\frac{\eta}{\omega} Z - Z_{1,0}(z)$$

essendo:

$$z = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} .$$

L'integrale che comparisce nell'equazione (2) suol chiamarsi *integrale ellittico di di seconda specie*. *Legendre* ha dato questo nome ad un altro che facilmente si esprime per mezzo del precedente:

Ponendo $z = \frac{\omega}{2}$ e quindi $y = 1$, ottengo dall'equazione (2):

$$(3) \qquad \frac{\eta}{2} = -k^2 \int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} .$$

Fo $z = \frac{\omega + \omega'}{2}$, e quindi $y = \frac{1}{k}$, ed ho:

$$-\frac{\eta}{2} - \frac{\eta\omega'}{2\omega} + \frac{\pi i}{\omega} = k^2 \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

$$= k^2 \int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} + k^2 \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

onde, osservando la (25) del n.° 12. P. I, si ricava:

$$\frac{\eta'}{2} = -k^2 \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} .$$

Ponendo al solito:

$$y^2 = \frac{1 - k'^2 x^2}{k^2}$$

ottengo:

$$(4)\qquad \frac{\eta'}{2}=\frac{\omega'}{2}-ik^2\int_0^1\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}\,.$$

Pongo:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{H}&=k^2\int_0^1\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,,\\ \mathrm{H}'&=k'^2\int_0^1\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}\,,\end{aligned}\right.$$

ed ho:

$$(6)\qquad \eta=-2\mathrm{H}\,,\quad \eta'=2i\mathrm{K}'-2i\mathrm{H}'$$

Sostituisco i valori (6) e i valori (15) del n.° 3 nell'equazione (25) del n.° 12. P. I, ed ottengo:

$$(7)\qquad \mathrm{KH}'-\mathrm{HK}'-\mathrm{KK}'=\frac{\pi}{2}\,.$$

Dall'equazioni (18), (20), (21) e (22) del n.° precedente si deduce facilmente:

$$(9)\qquad \mathrm{Z}_{1,0}(z+w)=\mathrm{Z}_{1,0}(z)+\mathrm{Z}_{1,0}(w)-k^2\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{sn}(z+w)$$

$$(10)\qquad \mathrm{Z}_{0,1}(z+w)=\mathrm{Z}_{0,1}(z)+\mathrm{Z}_{0,1}(w)-k'^2\frac{\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{sn}(z+w)}{\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{cn}(z+w)}\,,$$

$$(11)\qquad \mathrm{Z}_{0,0}(z+w)=\mathrm{Z}_{0,0}(z)+\mathrm{Z}_{0,0}(w)+k^2\frac{\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{sn}(z+w)}{\mathrm{dn}\,z\,\mathrm{du}\,w\,\mathrm{dn}(z+w)}\,,$$

$$(12)\qquad \mathrm{Z}_{0,0}(z+w)=\mathrm{Z}_{1,1}(z)+\mathrm{Z}_{1,1}(w)$$
$$+\frac{1}{\mathrm{sn}^2z-\mathrm{sn}^2w}\left(\frac{\mathrm{sn}^2w\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z}{\mathrm{sn}\,z}-\frac{\mathrm{sn}^2z\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w}{\mathrm{sn}w}\right).$$

Moltiplico per dw e integro l'equazioni (18), (19), (20) e (21) del n.° 4, ed osservando l'equazione (1) del n.° 3, ho:

$$(13)\left\{\begin{aligned}
\Pi_{1,0}(w,z)&=k^2\int_0^w\frac{\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z\,\mathrm{sn}^2w\,\mathrm{d}w}{1-k^2\mathrm{sn}^2z\,\mathrm{sn}^2w}=\mathrm{Z}_{1,0}(z)\,w-\frac{1}{2}\log\frac{\Theta_{1,0}(z+w)}{\Theta_{1,0}(z-w)}\\
\Pi_{0,1}(w,z)&=k'^2\int_0^w\frac{\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{dn}\,z\,\mathrm{sn}^2w\,\mathrm{d}w}{\mathrm{cn}\,z(\mathrm{cn}^2z-\mathrm{dn}^2z\,\mathrm{sn}^2w}=\mathrm{Z}_{0,1}(z)\,w-\frac{1}{2}\log\frac{\Theta_{0,1})z+w)}{\Theta_{0,1}(z-w)}\\
\Pi_{0,0}(w,z)&=k^2\int_0^w\frac{\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{sn}^2w\,\mathrm{d}w}{\mathrm{dn}\,z(\mathrm{dn}^2z-k^2\mathrm{cn}^2z\,\mathrm{sn}^2w)}=-\mathrm{Z}_{0,0}(z)\,w+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta_{0,0}(z+w)}{\Theta_{0,0}(z-w)}\\
\Pi_{1,1}(w,z)&=k'^2\int_0^w\frac{\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z\,\mathrm{sn}^2w\,\mathrm{d}w}{\mathrm{sn}\,z(\mathrm{sn}^2z-\mathrm{sn}^2w)}=-\mathrm{Z}_{1,1}(z)\,w+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta_{1,1}(z+w)}{\Theta_{1,1}(z-w)}\,.
\end{aligned}\right.$$

Le funzioni $\Pi_{\mu,\nu}(w,z)$, possono comprendersi tutte nella unica formula:

$$(14) \qquad \Pi_{\mu,\nu}(w, z) = (-1)^{\mu+\nu}\left(-wZ_{\mu,\nu}(z) + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta_{\mu,\nu}(z+w)}{\Theta_{\mu,\nu}(z-w)}\right),$$

ponendo $\operatorname{sn} w = y$, prendono la forma:

$$(15) \qquad A\int_0^y \frac{y^2\, dy}{(1+hy^2)\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

e si chiamano *Integrali ellittici di* 3^a *specie.*

È chiaro che le funzioni $\Pi_{\mu,\nu}$ non sono monodrome, e quindi la loro teorica non troverebbe luogo in questa monografia. Ma essendo composte di una funzione $Z_{\mu,\nu}$ e di logaritmi di funzioni Jacobiane non constituiscono propriamente un genere particolare di funzioni, e la loro teorica è una immediata conseguenza della teorica delle funzioni Z e delle Jacobiane.

(*Continua*).



SUR LA COURBE PARALLÈLE A L'ELLIPSE.

PAR M. A. CAYLEY.

Il fut remarqué par Cauchy (*Comptes Rendus* tom. XIII p. 1063) que l'équation de cette courbe pourrait se trouver en eliminant θ entre les équations

$$\frac{a^2x^2}{(\theta+a^2)^2}+\frac{b^2y^2}{(\theta+b^2)^2}=1\ ,\qquad \frac{\theta^2x^2}{(\theta+a^2)^2}+\frac{\theta^2y^2}{(\theta+b^2)^2}=k^2$$

et cette elimination fut effectuée, et le resultat trové sous la forme la plus simple par M. Catalan (*Terquem* tom. III 1844 pag. 553); mais pour faire l'elimination de la manière la plus facile je remarque que ces deux équations donnent

$$\frac{x^2}{\theta+a^2}+\frac{y^2}{\theta+b^2}=1+\frac{k^2}{\theta}\ ,\qquad \frac{x^2}{(\theta+a^2)^2}+\frac{y^2}{(\theta+b^2)^2}=\frac{k^2}{\theta^2}$$

dont la seconde est la derivée, par rapport à θ, de la première; or cette première équation est

$$(\theta+k^2)(\theta+a^2)(\theta+b^2)-x^2\theta(\theta+b^2)-y^2\theta(\theta+a^2)=0$$

et, en égalant à zero le discriminant de la fonction cubique, on aura l'équation de la courbe; en posant

$$A=x^2+y^2-k^2-a^2-b^2\ ,\qquad B=b^2x^2+a^2y^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2\ ,$$
$$C=a^2b^2k^2$$

la fonction cubique, multipliée par 3, sera

$$(3,\ -A,\ -B,\ 3C)(\theta,\ 1)^3$$

on aura donc

$$4(A^2+3B)(B^2+3AC)-(AB-9C)^2=0$$

ou ce qui est la même chose

$$A^2B^2+4B^3+4A^3C+18ABC-27C^2=0$$

c'est à dire en substituant les valeurs de A, B, C, l'équation de la courbe sera

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2-k^2-a^2-b^2)^2(b^2x^2+a^2y^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)^2\\&+4(b^2x^2+a^2y^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)^3\\&+4a^2b^2k^2(x^2+y^2-k^2-a^2-b^2)^3\\&+18a^2b^2k^2(x^2+y^2-k^2-a^2-b^2)(b^2x^2+a^2y^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)\\&-27a^4b^4k^4=0\end{aligned}$$

la quelle est en effet l'équation trouvée par M. Catalan.

En écrivant $k=0$ l'équation devient

$$0=(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)\left[(x^2+y^2)^2-2(a^2-b^2)(x^2+y^2)+(a^2-b^2)^2\right]$$

ce qui équivaut à l'équation de l'ellipse

$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$$

deux fois repetée, et aux équations

$$(x\pm ae)^2+y^2=0$$

(ou comme à l'ordinaire $(a^2e^2=a^2-b^2)$ lesquelles appartiennent aux droites menées chacune par un foyer réel, et un foyer imaginaire de l'ellipse; ces droites sont aussi les tangents menées à l'ellipse par les quatre foyers. En effet en prenant sur l'ellipse le point imaginaire dont les coordonnés sont

$$x=\frac{a}{e},\quad y=ia\left(\frac{1}{e}-e\right)\quad (i=\sqrt{-1})$$

l'équation du cercle, rayon 0, ayant pour centre le point dont il s'agit, sera

$$\left(x-\frac{a}{e}\right)^2+\left[y-ia\left(\frac{1}{e}-e\right)\right]^2=0$$

ce cercle se reduit donc à deux droites savoir la droite

$$x-\frac{a}{e}+i\left[y-ia\left(\frac{1}{e}-e\right)\right]=0$$

où ce qui est la même chose

$$x-ae+iy=0$$

la quelle est tangente à l'ellipse, et la droite

$$\left(x-\frac{a}{e}\right)-i\left[y-ia\left(\frac{1}{e}-e\right)\right]=0$$

où ce qui est la même chose

$$x-a\left(\frac{2}{e}-e\right)-iy=0$$

la quelle est la droite menée par le point de contact à l'autre point circulaire à l'infini (celui qui n'est pas situé sur la tangente $x-ae+iy=0$). Le cercle, comme courbe composée d'une droite tangente à l'ellipse et d'une autre droite menée par le point de contact, a même avec l'ellipse une intersection à trois points reunis. Ces considérations font voir pourquoi au cas $k=0$ les quatre droites $(x\pm ae)^2+y^2=0$ font partie de la courbe.

En supposant que k est quelconque, mais, que l'on a $a=b$, l'équation devient

$$a^4(x^2+y^2)^2[(x^2+y^2-a^2)^2-2k^2(x^2+y^2+a^2)+k^4]=0$$

où en ecartant le facteur $(x^2+y^2)^2$ [l'équation est ce que devient dans le cas actuel l'expression

$$[(x-ac)^2+y^2][(x+ac)^2+y^2)],]$$

et le facteur constant a^4 l'équation se reduit à

$$(x^2+y^2-a^2)^2-2k^2(x^2+y^2+a^2)+k^4=0$$

c'est à dire

$$[x^2+y^2-(a+k)^2][x^2+y^2-(a-k)^2]=0$$

où la courbe se reduit à l'ensemble des deux droites $(x^2+y^2)=0$ (chacune deux fois repetée, et des deux cercles

$$x^2+y^2-(a+k)^2=0\,,\qquad x^2+y^2-(a-k)^2=0$$

comme évidemment cela doit être.

Per rapport aux singularités de la courbe, la forme de l'équation montre à premier coup d'œil quil y a quatre points doubles à l'infini; savoir les deux points circulaires à l'infini (points où l'infini est rencontré par les droites $x^2+y^2=0$), et les deux points où l'infini est rencontré par les droites $b^2x^2+a^2y^2=0$. Il y a de plus deux points doubles sur chacun des axes : en effet en écrivant dans l'équation de la courbe $y=0$ l'équation resultante, toute reduction faite devient

$$[(x-a)^2-k^2][(x+a)^2+k^2][b^2x^2-(a^2-b^2)(b^2-k^2)]^2=0$$

ce qui fait voir quil y a sur l'axe de x les deux points doubles dont les coordonnés sont donnés par l'équation

$$b^2x^2-(a^2-b^2)(b^2-k^2)=0.$$

Mais pour parvenir à cette conclusion il convient de considérer que l'axe de x rencontre la courbe dans des points tels que pour chacun la distance normale à l'ellipse est égale à k: il y a quatre distances normales k, mesurées le long de l'axe ; et quatre distances normales k mesurées à des points situeés symetriquement par rapport à l'axe, les quels se rencontrent deux à deux sur l'axe aux points dont les coordonnés sont $b^2x^2=(a^2-b^2)(b^2-k^2)$; c'est là l'origine des deux points doubles sur l'axe de x. On doit aussi remarquer que les coordonnés des points sur l'ellipse qui correspondent à ces points doubles sont donnés par les équations

$$x^2=\frac{a^4}{b^2}\,\frac{b^2-k^2}{a^2-b^2}\,,\qquad y^2=\frac{a^2k^2-b^4}{a^2-b^2}\,.$$

On voit de là que les points sur l'ellipse qui donnént lieu aux deux points doubles sur l'axe de x, ne seront réels à moins que $k>\frac{b^2}{a^2}$, $<b$; les deux points doubles

seront cependant réels pour toute valeur $k > 0 < b$. J'ajoute que pour les valeurs $k \overline{\overline{>}} 0$, $< \frac{b^2}{a}$, les deux points doubles seront des points coniugués eu isolés; pour $k = \frac{b^2}{a}$, chacun de ces points se reunit à la courbe, et à deux points de rebroussement, mais il n'y a pas de singularité *visible* dans la forme de la courbe ; pour $k > \frac{b^2}{a} < b$ il y a deux points doubles avec des branches réelles; et pour $k = b$, ces deux points viennent se réunir au centre de l'ellipse et il y a deux branches ayant pour tangente commune à ce point, l'axe de x; enfin pour $k > b$, les deux points doubles sur l'axe de x deviennent imaginaires. Des considerations pareilles s' appliquent aux points doubles sur l'axe de y; pour $x = 0$ l'équation de la courbe se transforme en

$$[(y - b)^2 - k^2]\,[(y + b)^2 + k^2]\,[a^2y^2 - (a^2 - b^2)(k^2 - a^2)\,]^2 = 0$$

il y a donc sur l'axe de y deux points doubles dont les coordonnés sont donnés par

$$a^2y^2 - (a^2 - b^2)(k^2 - a^2) = 0.$$

Ces points correspondent à des points sur l'ellipse dont les coordonnés sont donnés par

$$x^2 = \frac{a^4 - b^2k^2}{a^2 - b^2}, \qquad y^2 = \frac{b^4}{a^2}\,\frac{k^2 - a^2}{a^2 - b^2}$$

les points sur l'ellipse ne seront donc réels à moins que $k > \frac{a^2}{b}$, les deux points doubles seront cependant réels pour toute valeur $k > a$. Pour $k < a$ les deux points doubles seront imaginaires. Pour $k = a$ le centre est point de reunion de deux points doubles et il y a deux branches qui ont à ce point pour tangente commune l' axe de y : pour $k = \frac{a^2}{b}$, chacun des deux points doubles se reunit à deux points de rebroussement; mais il n'y a pas de singularité visible dans la forme de la courbe; enfin pour $k > \frac{a^2}{b}$ les deux points doubles se détachent de la courbe et deviennent des points coniugués ou isolés. En resumé, il y a 8 points doubles, savoir quatre points doubles à l'infini, et quatre points doubles sur les deux axes.

Il y a de plus de 12 points de rebroussement; ces points sont en effet les centres de courbure aux points de l'ellipse pour lesquels le rayon de courbure est égal a k; les douze points seront tous imaginaires à moins que k n'est une valeur entre les limites $\frac{b^2}{a}$, $\frac{a^2}{b}$: pour une telle valeur de k les douze points seront 4 réels, et 8

imaginaires. Pour $k = \frac{b^2}{a}$ les quatre points réels se reunissent deux à deux aux deux points doubles sur l'axe de x; pour $k = \frac{a^2}{b}$, il se reunissent deux a deux aux deux points doubles sur l'axe de y; cela s'accorde avec ce qui est dit ci-dessus par rapport aux points doubles. On peut encore trouver que le nombre des points de rebroussement est 12 à moyen des équations

$$A^2 + 3B = 0\,,\ B^2 + 3AC = 0\,,\ AB - 9C = 0$$

les quelles appartiennent chacune à une courbe du quatrième ordre qui passe par les points de rebroussement; la forme des équations fait voir que ces courbes ont en commun 12 points, et seulement 12 points d'intersection. C'est là en effet la manière la plus simple de trouver les coordonnés des points de rebroussement; car ces équations donnent tout de suite

$$A = -3C^{\frac{1}{3}}\,, \qquad B = -3C^{\frac{2}{3}}.$$

C'est à dire, on a les equations

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2 + k^2 - 3(abk)^{\frac{2}{3}}\,,$$
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 + (a^2 + b^2)k^2 - 3(abk)^{\frac{4}{3}}$$

qui donnent les coordonnés des douze points de rebroussement.

Pour verifier, que ces points correspondent aux points de l'ellipse pour lesquel s le rayon de courbure est egal à k; je prends $a\cos\theta$, $b\sin\theta$ pour les coordonnés d'un point sur l'ellipse, les coordonnés du centre de courbure seront donnés par

$$ax = (a^2 - b^2)\cos^3\theta\,, \qquad by = -(a^2 - b^2)\sin^3\theta$$

et en supposant que le rayon de courbure soit egal à k, on a

$$k = \frac{1}{ab}(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}$$

et delà

$$a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta = (abk)^{\frac{2}{3}}$$

Cela donne

$$(a^2 - b^2)\cos^2\theta = a^2 - (abk)^{\frac{2}{3}}\,, \quad -(a^2 - b^2)\sin^2\theta = b^2 - (abk)^{\frac{2}{3}}$$

et delà on deduit

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{a^2 - b^2}\left[\frac{1}{a^2}\left(a^2 - (abk)^{\frac{2}{3}}\right)^3 - \frac{1}{b^2}\left(b^2 - (abk)^{\frac{2}{3}}\right)^3\right]$$
$$b^2x^2 + a^2y^2 = \frac{1}{a^2 - b^2}\left[\frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - (abk)^{\frac{2}{3}}\right)^3 - \frac{a^2}{b}\left(b^2 - (abk)^{\frac{2}{3}}\right)^3\right]$$

valeurs qui s'accordant en effet avec les valeurs ci-dessus trouvées.

*

La courbe parallèle a l'ellipse est de l'ordre 8 et il y a 8 points doubles, et 12 points de rebroussement; elle sera donc de la classe $56 - 16 - 36 = 4$. En effet pour mener d'un point donné une tangente à la courbe parallèle on peut décrire avec ce point comme centre un cercle rayon k, pour mener une tangente commune au cercle, et à l'ellipse; la droite, menée par le point donné, parallèle à la tangente commune sera la tangente cherchée : on peut donc per une point donné mener 4 tangentes à la courbe, ou la courbe parallèle est de la classe 4. Au reste on peut trouver très facilement l'équation de la courbe parallèle en coordonnés tangentiels. Car en representant par θ l'inclination d'une tangente quelconque de l'ellipse à l'axe de x, l'equation de cette tangente est

$$x \cos\theta + y \sin\theta - \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} = 0\,,$$

et l'équation de la tangente parallèle de la courbe sera ainsi

$$x \cos\theta + y \sin\theta - k - \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} = 0.$$

Donc en representant cette équation par $\xi x + \eta y + \zeta = 0$ on aura

$$\xi : \eta : \zeta = \cos\theta : \sin\theta : k + \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$$

et de la

$$\zeta + k\sqrt{\xi^2 + \eta^2} + \sqrt{a^2\xi^2 + b^2\eta^2} = 0$$

la quelle est l'équation dont il s'agit; la forme rationelle est

$$(a^2 - k^2)^2\xi^4 + (b^2 - k^2)^2\eta^4 + 2(a^2 - k^2)(b^2 - k^2)\xi^2\eta^2$$
$$- 2(a^2 + k^2)\zeta^2\xi^2 - 2(b^2 + k^2)\zeta^2\eta^2 + \zeta^4 = 0$$

équation du quatrième ordre comme cele devait être.

J'ai cru qu'il n'etait pas nécessaire de faire voir comment on pourrait à moyen de l'équation, tracer la courbe; en effet on trouve les différentes formes assez facilement par des considèrations geométriques, en considérant la courbe comme la developpée de l'evolute de l'ellipse, on se rend compte à ce moyen de ce qui est dejà dit par rapport aux points doubles et aux points de rebroussement.

Je remarque enfin que l'équation d'une normale quelconque de l'ellipse est

$$ax \sin\theta - by \cos\theta = (a^2 - b^2)\sin\theta \cos\theta$$

(où θ est un paramètre arbitraire) : donc en considérant la traiectoire orthogonale de ce système de droites, on obtient

$$(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)\sqrt{b^2\mathrm{d}x^2 + a^2\mathrm{d}y^2} + (a^2 - b^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

comme équation differéntielle de la courbe parallèle à l'ellipse. L'integral de cette équation est donc du huitième ordre (contenant k comme constante arbitraire) qu'on a ci-dessus trouvée.

Londres 2. Stone Buildings 22me oct. 1860.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

SULLA CURVA LOGOCICLICA.

BOOTH — (ON THE LOGOCYCLIC. CURVE, AND THE GEOMETRICAL ORIGIN OF LOGARITHMS. Quarterly Journal of . . Mathematics London November 1858 N.° 9 pag. 38, Mai 1859 N.° 10. pag. 127)

1.° Le eleganti ricerche intraprese dal Sig. *Booth* sopra questa curva del terzo ordine, e di già conosciuta dai geometri, mi hanno dato motivo di notare alcune particolarità storiche sui lavori di altri geometri sopra la medesima curva : tale è lo scopo di questo articolo.

Richiamo brevemente in qual problema geometrico abbia avuto origine la curva. Al punto di mezzo C di una retta AB si alzi una direttrice CO ortogonale tagliata da un raggio vettore AMM′, che parte dall'origine A delle coordinate : il luogo geometrico dei punti M, M′ determinati sui raggi vettori in modo che CD = DM = DM′ ove D sia l'intersezione del raggio vettore con la direttrice, rappresenta la *logociclica.* La curva è composta di una foglia, che interseca i suoi rami infiniti nel punto C, ed una retta inalzata perpendicolarmente all' estremo B dell' asse sarà un' assintoto. È assai facile di stabilire la sua equazione polare di duplice forma per i punti M, M′: infatti chiamando u l'angolo che i raggi AM $= r$, AM′ $= r_1$ presi nella medesima direzione formano con l'asse AB, si avrà evidentemente

$$r = a(\sec u - \operatorname{tang} u), \qquad r_1 = a(\sec u + \operatorname{tang} u)$$

Il prodotto dei raggi porge $rr_1 = a^2$, il che indica esser reciproci i punti M, M′: l'equazione in coordinate ortogonali può essere indipendente dal doppio valore di r, mentre da ambedue si ha

$$a^2 \operatorname{tang}^2 u = (r - a \sec u)^2$$

quindi sostituendoci

$$\operatorname{tang} u = \frac{y}{x}, \qquad \sec u = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{x}$$

si avrà

$$y^2 = \frac{x(a-x)^2}{2a - x}, \quad \text{ed} \quad y = \pm \frac{(a-x)\sqrt{x}}{\sqrt{(2a - x)}}$$

ora $x = a$, rende $y = 0$, ed $x = 2a$, $y = \infty$, d'onde C è un nodo della curva, e la retta normale sul punto B dell'asse ne sarà un'assintoto.

2.° Il Sig. *Booth* ritrova specialmente la logociclica nella rettificazione della parabola di parametro $4a$ col fuoco in C, mentre un'arco di parabola diminuito della sua *protangente* (perpendicolare abbassata del fuoco sulla normale) è eguale al prodotto di a pel logaritmo Neperiano del raggio vettore r delle *logociclica*: sù questa proprietà della parabola sono fondate le ricerche del Sig. *Booth* sulla curva in questione per l'origine geometrica dei logaritmi Neperiani. Esso come lo faremo conoscere prova ancora che la *logociclica* si può definire, l'inviluppo dei circoli, dei quali i centri si trovino sul perimetro di una parabola, ed aventi per raggio $\sqrt{(f^2 - a^2)}$, ove f sia la distanza del centro del circolo dal fuoco della parabola. Siano infatti X, Y le coordinate di un punto qualunque di una parabola di parametro $4a$ con l'origine al fuoco, si avrà per l'equazione del circolo e della parabola

$$(x - \mathrm{X})^2 + (y - \mathrm{Y})^2 = f^2 - a^2 , \quad \mathrm{Y}^2 = 4a(a - \mathrm{X}).$$

Chiamando θ l'angolo formato con l'asse delle x, dalla perpendicolare abbassata dal fuoco sulla tangente, si hà facilmente dalle proprietà della parabola

$$\mathrm{X} = a - a \operatorname{tang}^2\theta , \quad \mathrm{Y} = 2a \operatorname{tang}\theta , \quad f = \frac{a}{\cos^2\theta} \cdot$$

Sostituiti questi valori nell'equazione del circolo si avrà

$$x^2 + y^2 + 2a(\operatorname{tang}^2\theta - 1)x - 4a \operatorname{tang}\theta\, y + a^2 = 0.$$

Ora l'inviluppo di questo circolo si otterrà dalla derivata nulla rapporto a θ della precedente equazione, per cui rappresentata da $u = 0$, porge

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{4ax \operatorname{tang}\theta}{\cos^2\theta} - \frac{4ay}{\cos^2\theta} = 0$$

ove sostituendoci in fine $\operatorname{tang}\theta = \frac{y}{x}$, si avrà per equazione del luogo geometrico dimandato

$$(x^2 + y^2)(2a - x) = a^2 x$$

la quale appartiene alla *logociclica.* Il Sig. *Booth* si occupa pure della rettificazione della curva, e trova che un suo arco viene rappresentato con archi di iperbola equilatera, di ellisse e con grandezze rettilinee: più brevemente la sua rettificazione si riporta ai trascendenti ellittici. La medesima curva ha dei rapporti singolari con la *Cissoide* di *Diocle* e con la curva *Versiera* di donna *Maria Agnesi* : la prima considerandola come il luogo geometrico della projezione ortogonale del vertice della parabola sulle sue tangenti, avrà per assintoto la direttrice della parabola: e l'equazione della cissoide sarà $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$. In questa *Cissoide* a sarà il diametro del circolo direttore; se il diametro fosse $2a$, si avrà $y^2 = \frac{x^2}{2a - x}$. Questa nuova *Cissoide*, e la *logociclica*

avranno un comune assintoto. La *Versiera* è pure del terz'ordine, e la curva nasce nel circolo, quando l'ordinata della nuova curva si prenda come quarta proporzionale dopo l'ascissa, l'ordinata del circolo, ed il diametro, cioè

$$x : \sqrt{(2ax - x^2)} :: 2a : y$$

d' onde

$$y = \frac{2a\sqrt{(2ax-x^2)}}{x} = 2a\sqrt{\frac{2a-x}{x}}.$$

Il Sig *Booth* fa rimarcare delle relazioni singolari fra le tre ordinate delle tre curve, che per brevità tralascio di trascrivere.

3.° Nell'equazione polare della logociclica fatto $a = 1$, e presi i logaritmi iperbolici, avremo simultaneamente

$$\log r = \log(\sec u + \tang u)\,, \quad -\log r = \log(\sec u - \tang u)$$

quindi dalla differenziazione, ed integrazione si avrà

$$\frac{dr}{r} = \frac{du}{\cos u}, \quad \log r = \int \frac{du}{\cos u}.$$

Ciò posto è chiaro, che per una pura identità si ha

$$\sec u \frac{e^{\log r} + e^{-\log r}}{2}, \quad \tang u = \frac{e^{\log r} - e^{-\log r}}{2}$$

d'onde

$$\sec u = \frac{e^{\int \frac{du}{\cos u}} + e^{-\int \frac{du}{\cos u}}}{2}, \quad \tang u = \frac{e^{\int \frac{du}{\cos u}} - e^{-\int \frac{du}{\cos u}}}{2}.$$

Formole somiglianti ai valori del seno e coseno espressi in funzione dell'argomento. Queste analogie a molte altre ricavate dal Sig. *Booth* servono a fondare, come esso dice, una specie di trigonometria parabolica. Le medesime espressioni di $\sec u$, $\tang u$ danno origine anche alle così dette *funzioni iperboliche*, e di già notate dagli Analisti. Di più per la sostituzione immaginaria

$$\text{sen}\,\varphi = \sqrt{-1}.\ \tang u$$

si trae

$$\cos\varphi = \sec u = \frac{1}{\cos u}, \quad \cos\varphi\, d\varphi = \sqrt{-1}\,\frac{du}{\cos^2 u}$$

d'onde

$$\frac{du}{\cos u} = -\sqrt{-1}.\, d\varphi, \qquad \int\frac{du}{\cos u} = -\varphi\sqrt{-1}.$$

Di qui i precedenti valori di $\sec u$, $\tang u$ si ridurranno ai noti valori di $\cos\varphi$, $\text{sen}\,\varphi$ per mezzo degli esponenziali immaginarii.

4.° Vengo ora ad indicare alcune particolarità storiche: osservo di passaggio, che in molti trattati antichi, e moderni di Calcolo infinitesimale, e di geometria analitica si ritrova l'equazione della logociclica, o come l'enunciato di un problema, o da servire per costruzione geometrica. Nel tom. 5.° *Ann. de Terquem* Paris 1846 a p. 470 si legge *La Strophoide* par *M.r George Ritt* : nell' indice a pag. 709 si dice che l'articolo appartiene al Sig. *Montucci*. In questo scritto adunque del Sig. *Montucci* si trovano sviluppate, ed esposte con qualche estenzione le proprietà delle *Strofoide* curva identica alla *logociclica ;* così per la rettificazione si trova una serie secondo le potenze ascendenti delle x: in una breve nota alla pag. 470 si fà rimarcare, che la *strofoide* era stata già studiata del Sig. Midy. *Ann. de Terquem*. tom. 3.° pag. 293. Fra le Opere pubblicate nello scorso secolo piacemi d'indicare: *Institutiones Analyticae Riccati , et Saladini*. Bononiae 1765. tom. 1.° pag. 328 *problema nonum*. Nello stesso volume a pag. 368 sotto l'enunciato di un'altro problema si giunge all'equazione della *logociclica*, e si fa osservare esser la medesima di quella a pag. 328. Più anticamente nelle *Istituzioni analitiche* di donna *Maria Gaetana Agnesi* stampate a Milano nel 1748 al tom. 1.° pag 378, quale enunciato di un problema di geometria, indicato di già nel n.° 1.°, la *Agnesi* trova per equazione della curva logociclica

$$\pm y = \frac{ax - x^2}{\sqrt{(2ax - x^2)}}.$$

Essa ne fà una breve discussione, e per dare un'esempio di costruzioni geometriche ne riprende a parlare a pag. 391.

5.° La logociclica si è presentata in special modo ai geometri nella teorica dei fuochi delle sezioni coniche. Citerò per ora due scritti pubblicati in questo secolo. Il Sig. A. *Quetelet* pubblicò a *Gand* nel 1819 il seguente scritto. *Dissertatio de quibusdam locis geometricis nec non de curva focali*. Questa dissertazione è divisa in due parti, nella seconda si parla della *curva focale* nelle sezioni coniche, e che in un caso particolare si identifica alla *logociclica*. Interesserà per la parte storica di riportare alcune parole della prefazione « .... quumque sectiones conicas in ipso cono descriptas considerassem inveni dum planum circa punctum quoddam in cono recto situm, motu continuo agitur , et variae inde oriuntur sectiones , harum omnium sectionum focos in linea curva versari cuius aequationem describere variasque proprietates indicare mihi contingit. Haec curva an etiam prius iam fuerit observata certe nescio, nec sola disquirendi voluptate detentus rescire studebam: quapropter hoc nomen *Curvae focalis* quod ipsi indidi ut proprietatem, qua gaudet exprimerem, facile libenterque ei remitterem, qui illam prius observasset, » ed a pagine 2 ripete « de curva focali praesertim fusius tracto, quae an unquam fuerit observata, nescio. » Il Sig. *Quetelet* riportando la curva nel cono, ne forma l'equazione di terzo grado con due costanti, e

supponendo quindi paralleli i due lati del cono, che si trasforma in un cilindro, riduce l'equazione con una sola costante alla forma consueta della *logociclica*, che venne in appresso chiamata *focale regolare*. Il Sig. *Quetelet* ne determina l'equazione della tangente, l'espressione del raggio di curvatura in coordinate polari con l'origine al nodo: dice inoltre a pag. 25 « quae est linea tertii ordinis ejusdem formae ac illa, quae a Newtono inter *hyperbolas anguineas* relata numeratur. Quae quidem curva in casu singulari maximam habet cum *Cissoide* veterum analogiam .» La confronta con la curva trisecatrice di un angolo, della quale ne trattarono *Garnier*, ed *Ademar* fin dal 1806 in una operetta pubblicata a Parigi; quantunque la curva trisecatrice di Garnier appartenga al quart'ordine, e se non erro si identifica con le *Cardiode*, curva inversa della parabola riferita al fuoco, una delle varietà della curva di Pascal, e che può entrare nella famiglia delle *Concoidi*.

6.° Quattro anni dopo la pubblicazione della dissertazione del Sig. *Quetelet* comparve alla luce una nuova dissertazione sulla curva focale di altro geometra, ed eccone il titolo « Dissertatio inauguralis Mathematica de curva focali regulari quam ... scripsit *Edmundus Külp* Hassus Mannhemii 1823. » La dissertazione versa del tutto sullo svolgimento delle proprietà della curva focale regolare ed identica alla *Logociclica*. Il Sig. Külp dalla lettura della dissertazione del Sig. *Quetelet*, nella prefazione si esprime in questa guisa « Celeb. *Quetelet* .... dum numerus quilibet planorum per punctum quoddam in cono recto situm agatur ad idem planum quod punctum datum, et axem coni contineat perpendicularium: totidem orientur sectiones conicae, harum omnium sectionum focos in linea curva versari invenit: quapropter hanc auctor eruditus recte nominat curvam focalem. Apparet simile quid eveniret si conus in cylindrum mutatur: nam cylindrus considerari potest tanquam conus cuius vertex longintitate infinita remotus est. Hoc verum recens repertum me excitavit ad proprietates curvae focalis regularis, id est, quae intra cylindrum rectum generata est excutiendas, quippe quae focali irregulari *i, o* ea quae intra conum rectum procriata est simplicior repiritur. » La dissertazione del Sig. Külp occupa trentaquattro pagine in 8.° grande con una tavola per la figura, ed è divisa in venticinque numeri: le sue ricerche son tutte promosse con l'analisi finita, ed infinitesimale: determina l'equazione polare della curva, e la sua quadratura con l'origine al nodo, ed al vertice: cerca inoltre l'espressione del raggio osculatore. Il Num.° 22. è tutto impiegato per la rettificazione della curva, dipendente dalle funzioni ellittiche; ed a pag. 22 per l'arco della *focale regolare* così si esprime « Haec aequatio nobis indicat arcum focalis exprimi functionibus circularibus, logarithmo, et arcubus ellipseum duarum, quarum axes majores sunt 2 atque minores $\sqrt{2}$. » Senza dubbio dovrà coincidere con l'espressione ritrovata dal Sig. *Booth*. In appresso facendo ruotare la curva attorno l'asse, l'autore si occupa della quadratura, della cubatura, dei centri di gravià e dei momenti d'inerzia. Alla dissertazione del Sig. *Quetelet* fece seguito una lunga,

e dotta Memoria di geometria del Sig. Dandelin pubblicata nel volume 2° delle Memorie dell'Accademia di Bruxelles per l'anno 1822 sotto il seguente titolo « Mémoire sur quelques propriétés remarquables de la focale parabolique. » Nel primo parag. si occupa della determinazione dei fuochi in una sezione conica. Il secondo parag. ed assai lungo versa sulle diverse generazioni della focale, della sua forma, e di qualcuna delle sue proprietà. Il Sig. *Dandelin* cita il lavoro del Sig. Quetelet ed a molte altre interessanti ricerche termina col determinare l'equazione polare, e la quadratura con l' origine al vertice. Indicati i più importanti lavori dei moderni geometri sulla *logociclica*, ci resta a vedere, quali siano stati i lavori somiglianti dei geometri ed italiani nello scorso secolo, e che sembrano essere stati ignorati del tutto dai moderni.

7° Nel vol. 4° *Instituti Bononiensis Commentarii. Bononiae* 1757. a pag. 288 si trova, *Gregorii Casali de conicarum sectionum focis*, dissertazione di pag. 13 in 4° grande con una tavola di otto figure: di più nello stesso vol. a pag. 338 si legge *Gregorii Casali de conicarum sectionum focis*, *Sermo alter*, con due tavole di sei figure, e di pag. 11. Lo scopo unico del *Casali* in queste due disertazioni, è di far riconoscere l'esistenza della curva focale nelle differenti sezioni del piano con un cono retto, e prendendo anche ad esame l'intersezione del piano con un cilindro, nel qual caso il luogo geometrico dei fuochi sarà la focale regolare del Sig. *Külp*, o la logociclica del Sig. *Booth*: la prima dissertazione del *Casali* contiene interessanti ricerche analitiche, e geometriche: nella seconda poi viene sviluppato lo stesso soggetto con dimostrazioni del tutto geometriche: benchè ambedue pubblicate nello stesso volume, l'Autore fa avvertire essere state presentate nelle sedute dell'Accademia delle Scienze di Bologna con l'intervallo di quattro anni. Potrà interessare di riportare alcuni squarci dell'Autore, il quale fà avvertire che questa curva era cognita al *Grandi*, ed al *Torricelli*. Così a pag. 298 dice « Quo circa non ingratum vobis fore Sodales Optimi arbitratus sum si proprietatem quandam vobis comunicem, quam ego paucis ab hinc mensibus in conis observavi, antea, quod sciam observavit nullus » quindi dice aver da richiamare una formola « formulam hanc jam olim aperuit mihi clarissimus *Petronius Matteuccius* .... Tunc temporis usus fuit *Matteuccius* elementis algebrae a celeberrimo *Guidone Grandio* compositis ... (Opera inedita del *Grandi*) Atque haec formula a *Grandio* proposita curvam exprimit quam ipse pteroidem Torricellianam appellat. Hanc autem sic describit *Grandius*. » La costruzione riportata del *Grandi* è quella di già indicata in principio, ed il *Casali* con le coordinate ortogonali trova l'equazione

$$0 = x^3 - 2ax^2 + a^2x - 2ay^2 + y^2x$$

« Haec igitur est formula, quam a *Matteuccio* et *Grandio* jam didici. Elapso autem aliquo tempore curvam istam in institutionibus analyticis mulieris doctissimae *Cajetanae Agnesiae* denuo inspexi. » Dalle riportate parole, il *Casali* richiama un trat-

tato di algebra del *Grandi*, ed il *Grandi* fà supporre che della curva in questione se ne fosse anche occupato il *Torricelli*. Io non conosco in quali opere del *Torricelli*, si parli di questa curva. Il *Casali* per studiare nella maggior generalità la curva focale, si propone la ricerca del luogo geometrico nel caso che l'asse, e la direttrice siano fra di loro ad angolo qualunque; e si esprime in questo modo: « Enim vero haec est sodales doctissimi pteroides illa torricelliana, quae Mathematicis notissima neque mihi prorsus nova, demum mihi visa est quodammodo in conorum visceribus ab quadam eorum proprietate delineari. Atque immo arbitratus sum, me clarius in conis pteroidem nostram inspicere, si melius antea pteroidem ipsam expenderer, omnia ei tribuens, quae ad eam pertinent.

In hujus curvae genesi angulus ABC, et angulus ADQ facti sunt recti (l'angolo che l'asse forma con la direttrice). Cur igitur ajebam ego, et non quavis amplitudine hi anguli aperientur? Sic plane generalius construetur curva, idque omne quod de ea usque adhuc est dictum, de quadam vix dictum erit peculiari eiusdem curvae constructione. » Quindi il *Casali* determina l'equazione della curva riferita agli assi obliqui, e presi nella direzione dell'asse, e della direttrice : ne mostra la coincidenza con l'equazioni del *Grandi*, e della *Agnesi* nell'ipotesi degli assi ortogonali, e dopo una qualche discussione dell'equazione dice « En demum Sodales doctissimi pteroidem torricellianam latissime constructam. Non amplius haec indiget angulo recto : construitur angulo quovis ; » quindi dopo non poche altre interessanti osservazioni prosegue « Convertamur ad conos ... nostram inveniemus curvam quae nos libenter se conos insidere monebit. » Dopo un particolare esame della curva focale nelle sezioni del cono termina col dire « Jam satis Sodales doctissimi demonstratum est, ni fallor, pteroidem torricellianam conis inesse et ab focis sectionum gigni , per quas transiret planum mobile se se convertens circa quodvis superficiei punctum.

Coeterum ex hoc colligitur pteroidem non tantum conos habitare sed cilindros etiam ; » in questa ipotesi si ottiene la focale regolare, la *logociclica* del Sig. *Booth*.

La seconda dissertazione del *Casali* è tutta diretta con dimostrazioni geometriche a far riconoscere, come la curva focale si trovi in tutte le sezioni del cono retto con un piano, anzi esso prendendo a discutere con più maturo esame le proprietà del cono, viene a ritrovare un' infinità di curve focali , e che costantemente chiama *pteroides torricellianae*; non essendo possibile in poche parole di dare un'idea adequata del lavoro geometrico del *Casali*, ci basterà riportare alcune parole del medesimo, e l'enunciato di un teorema ivi dimostrato. Così alla fine della pag. 338 e seg. si legge : « Nunc pteroidem paullisper etiam consectabor eam semper contuens intra conos rectos, ut enarrare ita sequar historiam noviter detecti pteroidis nostrae domicilii. » A pagine poi 346 si dice « Ego malo vobis ostendere theorema quoddam, si quid iudico bene amplum : videlicet quodlibet punctum intra conum detur id semper esse focum

quarumdam conicarum sectionum. Pteroides torricellianae theorema mecum demonstrant, ideoque ipsum hic minime praeterire decebat : » passa quindi alla dimostrazione. Da quanto si è di sopra esposto resta fuor di dubbio che i lavori del *Casali* siano restati sconosciuti dai Geometri moderni, che si sono occupati delle proprietà della logociclica; d'altronde il Sig. *Booth* nelle sue ricerche non ha avuto occasione di riconoscere la curva come una focale regolare. Gli eruditi cultori della geometria potrebbero rintracciare ed indicare in quali Opere del *Torricelli* siano state prese ad esame queste curve che dal *Grandi*, che giusta le parole del *Casali*, vengono sempre chiamate *Pteroides Torricellianae.* Terminerò quest'articolo col notare che nella citata collezione dei *Commentarii Instituti Bononiensis* si trovano altre Memorie del *Casali*, di geometria, di algebra, e di Fisica meccanica : piacemi di richiamarne l'ultima di geometria, ed impressa nel tomo 7.° 1791: così a pag. 338 si legge il seguente titolo: *Gregorii Philippi Mariae Casalii Bentivoli Paleotti. De polygonoidum area.* Questo articolo contiene nove pagine con una tavola di figure. Il *Casali* vuol ritrovare la superficie generata da un poligono che con moto di rotazione si ravvolge sopra una retta : per il poligono regolare a pag. 340 enuncia, e dimostra il seguente teorema « Si F aream regularis figure denotet, quae polygonoidem generat, c vero aream circuli eidem figurae circumscripti, dico aream polygonoidis esse $= F + 2c$. » Per la cicloide si trova subito esser l'area della curva tripla del circolo generatore. Il *Casali* apparteneva a nobile famiglia, congiunto egualmente ad altre nobili famiglie come lo indicano i suoi cognomi.

Roma 30 Maggio 1861.

BARNABA TORTOLINI.

PUBBLICAZIONI RECENTI



PIUMA CARLO MARIA. – Nota sulla determinazione della parte algebrica nell'integrazione in funzione finita esplicita. Fasc. in 4.° di pag. 16. *Genova* 1860.

CREMONA D. LUIGI – Memoria sulle superficie gobbe del terz'ordine. Fasc. in 4.° di pag. 14. *Milano* 1861. (Estratta dall'*Istituto Lombardo* vol. II.)

STAUD – Beiträge zur geometrie der lage 3.e Heft (Schlussheft). *Nürnberg* 1860.

BJERKNES, Über die geometrische Repräsentation der g'leichungen swischeu zwei veränderlichen reellen oder komplexen Grössen, Christiania 1859 (*Universtäts program für das zweite Halljahr* 1859).

CLEBSCH, Ueber Symbolische Dar Stellung algebraischer Formen (*Giornale Matematico di Berlino* tom. 59).

INTORNO AD UNA PROPRIETA' DELLE SUPERFICIE CURVE, CHE COMPRENDE IN SÈ COME CASO PARTICOLARE IL TEOREMA DI *DUPIN* SULLE TANGENTI CONIUGATE.

NOTA

DEL D^r. LUIGI CREMONA.

È notissimo che col nome di *tangenti coniugate* si designano due rette toccanti una data superficie in uno stesso punto, quando ciascuna di esse è generatrice di una superficie sviluppabile circoscritta alla data lungo una linea a cui sia tangente l'altra. Le proprietà delle tangenti coniugate sono dovute al Dupin, l'autore dei *Développements de géométrie*.

L'illustre Bordoni, in una breve *nota* che fa seguito all'importante memoria *sulle figure isoperimetre esistenti in una superficie qualsivoglia* (*), ha dimostrato una formola generale che comprende in sè, come caso particolarissimo, la proprietà fondamentale delle tangenti coniugate. Data una superficie ed una linea tracciata in essa, immaginiamo la superficie inviluppante una serie d'altre superficie, le quali abbiano un contatto *d' ordine qualunque* colla superficie data lungo la linea data. La formola di Bordoni esprime appunto la relazione di reciprocità fra le tangenti, nel punto comune, alla linea data ed alla caratteristica della superficie inviluppante.

In questa *nota* mi propongo di sviluppare alcune conseguenze che derivano dalla citata formola nel caso che il contatto fra la superficie data e le inviluppate sia di primo ordine, ed i punti di contatto siano *ombelichi* per le inviluppate medesime (**). Evidentemente tale ipotesi comprende in sè il caso che le inviluppate siano sfere o piani.

1. Sia:

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0$$

l'equazione di una superficie curva individuata, riferita ad assi rettangolari, e consideriamo in essa il punto qualsivoglia di coordinate x, y, z. Indichiamo per brevità con:

$$p, q, r$$

i valori delle prime derivate parziali:

(*) *Opuscoli matematici e fisici di diversi autori.* Tomo I. Milano 1832.

(**) Io ho già trattato quest'argomento, pel caso che le inviluppate siano sfere, in una *nota* inserita negli *Annali di scienze matematiche e fisiche* (Roma 1855). Ora riprendo la quistione per darle maggior generalità ed anche per rimediare ad un errore occorso in quella *nota*, benchè senza influenza sui principali risultati.

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{df}{dy}, \quad \frac{df}{dz}$$

corrispondenti al punto (x, y, z), e con:

$$l, \quad m, \quad n, \qquad l_1, \quad m_1, \quad n_1$$

i valori delle derivate seconde parziali:

$$\frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \frac{d^2 f}{dy^2}, \quad \frac{d^2 f}{dz^2}, \qquad \frac{d^2 f}{dy\, dz}, \quad \frac{d^2 f}{dz\, dx}, \quad \frac{d^2 f}{dx\, dy}$$

corrispondenti al medesimo punto. Sia poi:

$$(2) \qquad F(X, Y, Z, U, V, W) = 0$$

l'equazione di una famiglia di superficie, designandosi con X, Y, Z le coordinate correnti, e con U, V, W tre parametri indeterminati. Determiniamo questi parametri per modo che la equazione (2) rappresenti una superficie passante pel punto (x, y, z) della (1) ed ivi avente con questa un contatto di primo ordine. Indicati con:

$$P, \quad Q, \quad R$$

i valori delle derivate parziali:

$$\frac{dF}{dX}, \quad \frac{dF}{dY}, \quad \frac{dF}{dZ}$$

corrispondenti ad $X = x$, $Y = y$, $Z = z$; le equazioni da soddisfarsi saranno:

$$F(x, y, z, U, V, W) = 0$$

$$P : Q : R = p : q : r,$$

dalle quali si desumano:

$$U = u(x, y, z), \quad V = v(x, y, z), \quad W = w(x, y, z).$$

Questi valori sostituiti nella (2) danno:

$$(3) \qquad F(X, Y, Z, u, v, w) = 0$$

equazione rappresentante quella superficie della famiglia (2) che passa pel punto (x, y, z) della (1) ed ivi ha con essa comune il piano tangente.

Suppongasi ora data una linea qualsivoglia, tracciata sulla superficie (1) e passante pel punto (x, y, z). Sia essa rappresentata dalle equazioni:

$$(4) \qquad x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad z = z(s),$$

indicandosi con s l'arco della linea medesima. Supposto che nelle u, v, w dell'equazione (3) sian poste per x, y, z le equivalenti funzioni di s date dalle (4), l'equazione (3) verrà a rappresentare, per successivi valori di s, la serie di quelle super-

ficie della famiglia (2) che toccano la superficie (1) lungo la linea (4). Tale serie di superficie ammetterà una superficie inviluppo, l'equazione della quale sarà il risultato dell'eliminazione di s fra la (3) e la:

$$(5) \qquad F' = 0$$

derivata totale della (3) presa rispetto ad s.

Se nelle equazioni (3) e (5) si considera s come data o costante, esse rappresentano la caratteristica dell'inviluppo, cioè la curva lungo la quale la superficie inviluppo tocca quell'inviluppata che corrisponde al punto (x, y, z). Supponiamo che in queste equazioni le coordinate correnti X, Y, Z siano espresse in funzione di S, arco della caratteristica; allora le equazioni stesse, considerate come identiche, somministrano, mediante la derivazione rispetto ad S, le:

$$\frac{dF}{dX}\cdot\frac{dX}{dS}+\frac{dF}{dY}\cdot\frac{dY}{dS}+\frac{dF}{dZ}\cdot\frac{dZ}{dS}=0\,, \qquad \frac{dF'}{dX}\cdot\frac{dX}{dS}+\frac{dF'}{dY}\cdot\frac{dY}{dS}+\frac{dF'}{dZ}\cdot\frac{dZ}{dS}=0\,.$$

Facciamo in queste $X = x$, $Y = y$, $Z = z$ ed indichiamo con α_1, β_1, γ_1 i coseni degli angoli che la tangente alla caratteristica nel punto (x, y, z) fa cogli assi:

$$(6) \qquad p\alpha_1 + q\beta_1 + r\gamma_1 = 0$$

$$(7) \qquad \left[\frac{dF'}{dX}\right]\alpha_1 + \left[\frac{dF'}{dY}\right]\beta_1 + \left[\frac{dF'}{dZ}\right]\gamma_1 = 0$$

ove i simboli:

$$\left[\frac{dF'}{dX}\right], \quad \left[\frac{dF'}{dY}\right], \quad \left[\frac{dF'}{dZ}\right]$$

esprimono i valori delle derivate:

$$\frac{dF'}{dX}, \quad \frac{dF'}{dY}, \quad \frac{dF'}{dZ}$$

corrispondenti ad $X = x$, $Y = y$, $Z = z$.

Indicato ora con k ciascuno de' rapporti eguali:

$$\frac{P}{p}, \quad \frac{Q}{q}, \quad \frac{R}{r},$$

deriviamo totalmente rispetto ad s le equazioni:

$$P = kp\,, \qquad Q = kq\,, \qquad R = kr$$

considerate come identiche, in virtù della sostituzione delle u, v, w (funzioni di $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$) in luogo delle U, V, W. E si noti che la derivata totale di ciascuna delle quantità P, Q, R si comporrà di due parti: l'una relativa alla s implicita nelle u, v, w; l'altra relativa alla s che entra nelle coordinate esplicite. Derivando adunque le pre-

cedenti equazioni, e ponendo:

$$\frac{dP}{dx}=L\,,\qquad \frac{dQ}{dz}=\frac{dR}{dy}=L_1\,,$$

$$\frac{dQ}{dy}=M\,,\qquad \frac{dR}{dx}=\frac{dP}{dz}=M_1\,,$$

$$\frac{dR}{dz}=N\,,\qquad \frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}=N_1\,,$$

avremo:

$$\left[\frac{dF'}{dX}\right]+Lx'+N_1y'+M_1z'=k'p+k(lx'+n_1y'+m_1z')\,,$$

$$\left[\frac{dF'}{dY}\right]+N_1x'+My'+L_1z'=k'q+k(n_1x'+my'+l_1z')\,,$$

$$\left[\frac{dF'}{dZ}\right]+M_1x'+L_1y'+Nz'=k'r+k(m_1x'+l_1y'+nz'),$$

ove gli accenti in alto significano derivate rispetto ad s.

Si moltiplichino le equazioni precedenti, ordinatamente, per α_1, β_1, γ_1 e si sommino i risultati; avuto riguardo alle (6), (7) e indicati con α, β, γ i coseni degli angoli che la tangente alla data linea (4) nel punto (x, y, z) fa cogli assi, cioè posto:

$$x'=\alpha\,,\quad y'=\beta\,,\quad z'=\gamma\,,$$

avremo:

$$(8)\qquad \begin{aligned} 0=(L-kl)\alpha\alpha_1&+(L_1-kl_1)(\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)\\ +(M-km)\beta\beta_1&+(M_1-km_1)(\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1)\\ +(N-kn)\gamma\gamma_1&+(N_1-kn_1)(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1). \end{aligned}$$

Quest'è la relazione di reciprocità che lega fra loro le rette (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ tangenti, l'una alla linea data e l'altra alla caratteristica della superficie inviluppo; cioè essa è, sotto altra forma, l'equazione di Bordoni nel caso del contatto di primo ordine.

Per la proprietà espressa dall'equazione (8), sembra conveniente chiamare *tangenti coniugate* le due rette in quistione, designandole coll' epiteto di *coniugate ordinarie* o *dupiniane* nel caso che le superficie (2) siano piane.

2. Per la normale comune alle superficie (1) e (3) nel punto (x, y, z) conduciamo due piani che passino rispettivamente per le due tangenti coniugate (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$. Siano d, d_1 i raggi di curvatura delle sezioni normali risultanti nella prima superficie, e D, D_1 i raggi di curvatura delle sezioni normali risultanti nella seconda superficie. Avremo le note equazioni:

$$(9)\qquad \frac{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{d} = l\alpha^2 + m\beta^2 + n\gamma^2 + 2l_1\beta\gamma + 2m_1\gamma\alpha + 2n_1\alpha\beta\,,$$

$$(10)\qquad \frac{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{d_1} = l\alpha_1^2 + m\beta_1^2 + n\gamma_1^2 + 2l_1\beta_1\gamma_1 + 2m_1\gamma_1\alpha_1 + 2n_1\alpha_1\beta_1\,,$$

$$\frac{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{D} = L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + 2L_1\beta\gamma + 2M_1\gamma\alpha + 2N_1\alpha\beta\,,$$

$$\frac{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{D_1} = L\alpha_1^2 + M\beta_1^2 + N\gamma_1^2 + 2L_1\beta_1\gamma_1 + 2M_1\gamma_1\alpha_1 + 2N_1\alpha_1\beta_1$$

da cui, avuto riguardo all'identità:

$$k^2(p^2+q^2+r^2) = P^2+Q^2+R^2,$$

si ricava:

$$\begin{aligned} k\sqrt{p^2+q^2+r^2}\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{d}\right) = {} & (L-kl)\alpha^2 + 2(L_1-kl_1)\beta\gamma \\ & + (M-km)\beta^2 + 2(M_1-km_1)\gamma\alpha \\ & + (N-kn)\gamma^2 + 2(N_1-kn_1)\alpha\beta\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k\sqrt{p^2+q^2+r^2}\left(\frac{1}{D_1}-\frac{1}{d_1}\right) = {} & (L-kl)\alpha_1^2 + 2(L_1-kl_1)\beta_1\gamma_1 \\ & + (M-km)\beta_1^2 + 2(M_1-km_1)\gamma_1\alpha_1 \\ & + (N-kn)\gamma_1^2 + 2(N_1-kn_1)\alpha_1\beta_1\,. \end{aligned}$$

Queste due equazioni si moltiplichino fra loro, membro per membro, e dal risultato sottraggasi il quadrato della (8). Avuto riguardo alle note relazioni:

$$\frac{\beta\gamma_1-\gamma\beta_1}{\text{sen}\,\omega} = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\qquad \frac{\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1}{\text{sen}\,\omega} = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}\,,$$

$$\frac{\alpha\beta_1-\beta\alpha_1}{\text{sen}\,\omega} = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

ove ω è l'angolo delle rette (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, il risultato può scriversi così:

$$\frac{k^2(p^2+q^2+r^2)^2}{\text{sen}^2\omega}\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{D_1}-\frac{1}{d_1}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} p & L-kl & N_1-kn_1 & M_1-km_1 \\ q & N_1-kn_1 & M-km & L_1-kl_1 \\ r & M_1-km_1 & L_1-kl_1 & N-kn \\ 0 & p & q & r \end{vmatrix} = \Phi + k\Upsilon + k^2\Theta$$

Siano δ, δ_1 i raggi di massima e minima curvatura della superficie (1) nel punto (x, y, z); per una nota formola di Gauss (*) avremo:

$$\Theta = \frac{(p^2 + q^2 + r^2)^2}{\delta\delta_1}.$$

La quantità Φ ha l'analogo significato rispetto alla superficie inviluppata. Ma noi supporremo che per questa il punto (x, y, z) sia un ombelico, ed indicheremo con Δ il corrispondente raggio di curvatura, onde sarà $D = D_1 = \Delta$. Avremo dunque:

$$\Phi = \frac{k^2(p^2 + q^2 + r^2)^2}{\Delta^2}.$$

L'espressione Υ può scriversi così:

$$\begin{aligned}\Upsilon = & - l(Nq^2 + Mr^2 - 2L_1 qr) + 2l_1 \{p(\ \ L_1 p - M_1 q - N_1 r) + Lqr\} \\ & - m(Lr^2 + Np^2 - 2M_1 rp) + 2m_1 \{q(-L_1 p + M_1 q - N_1 r) + Mrp\} \\ & - n(Mp^2 + Lq^2 - 2N_1 pq) + 2n_1 \{r(-L_1 p - M_1 q + N_1 r) + Npq\}.\end{aligned}$$

Ma per le proprietà caratteristiche degli ombelichi, si hanno le seguenti formole date dal prof. Chelini nella sua elegantissima memoria *sulle formole fondamentali risguardanti la curvatura delle superficie e delle linee* (**):

$$\begin{aligned}& \frac{Nq^2 + Mr^2 - 2L_1 qr}{q^2 + r^2} = \frac{p(L_1 p - M_1 q - N_1 r) + Lqr}{qr} \\ = & \frac{Lr^2 + Np^2 - 2M_1 rp}{r^2 + p^2} = \frac{q(-L_1 p + M_1 q - N_1 r) + Mrp}{rp} \\ = & \frac{Mp^2 + Lq^2 - 2N_1 pq}{p^2 + q^2} = \frac{r(-L_1 p - M_1 q + N_1 r) + Npq}{pq} \\ & = \frac{k\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}{\Delta};\end{aligned}$$

quindi:

$$\Upsilon = -\frac{k\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}{\Delta} \times \left\{\begin{aligned} & (m + n)p^2 - 2l_1 qr \\ + & (n + l)q^2 - 2m_1 rp \\ + & (l + m)r^2 - 2n_1 pq \end{aligned}\right\}.$$

Ma si ha inoltre (***):

(*) *Disquisitiones generales circa superficies curvas.*

(**) *Annali di scienze matematiche e fisiche.* Roma 1853.

(***) *Ibidem.*

$$(m+n)p^2+(n+l)q^2+(l+m)r^2-2l_1qr-2m_1rp-2n_1pq$$
$$=(p^2+q^2+r^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta_1}\right),$$

onde :

$$\Upsilon=-\frac{k(p^2+q^2+r^2)^2}{\Delta}\left(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta_1}\right).$$

Otteniamo dunque finalmente :

$$(11)\qquad \left(\frac{1}{\Delta}-\frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{1}{d_1}\right)=\operatorname{sen}^2\omega\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{1}{\delta}\right)\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{1}{\delta_1}\right).$$

3. Le citate equazioni del prof. Chelini, relative agli ombelichi delle superficie, somministrano anche :

$$L=\frac{k\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\Delta}-\frac{p}{qr}(L_1p-M_1q-N_1r),$$
$$M=\frac{k\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\Delta}-\frac{q}{rp}(-L_1p+M_1q-N_1r),$$
$$N=\frac{k\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\Delta}-\frac{r}{pq}(-L_1p-M_1q+N_1r),$$

e per conseguenza :

$$L\alpha\alpha_1+M\beta\beta_1+N\gamma\gamma_1+L_1(\beta\gamma_1+\gamma\beta_1)+M_1(\gamma\alpha_1+\alpha\gamma_1)+N(\alpha\beta_1+\beta\alpha_1)$$
$$=\frac{k\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\Delta}(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)$$
$$+\frac{L_1}{qr}\left\{-p^2\alpha\alpha_1+(q\beta+r\gamma)(q\beta_1+r\gamma_1)\right\}$$
$$+\frac{M_1}{rp}\left\{-q^2\beta\beta_1+(r\gamma+p\alpha)(r\gamma_1+p\alpha_1)\right\}$$
$$+\frac{N_1}{pq}\left\{-r^2\gamma\gamma_1+(p\alpha+q\beta)(p\alpha_1+q\beta_1)\right\}$$

d'onde, avuto riguardo alle identità :

$$\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1=\cos\omega,\quad p\alpha+q\beta+r\gamma=0,\quad p\alpha_1+q\beta_1+r\gamma_1=0,$$

otteniamo :

$$L\alpha\alpha_1+M\beta\beta_1+N\gamma\gamma_1+L_1(\beta\gamma_1+\gamma\beta_1)+M_1(\gamma\alpha_1+\alpha\gamma_1)+N_1(\alpha\beta_1+\beta\alpha_1)$$
$$=\frac{k\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\Delta}\cos\omega.$$

Perciò all'equazione (8) può darsi la forma:

$$(12)\qquad \frac{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\Delta}\cos\omega = l\alpha\alpha_1 + l_1(\beta\gamma_1+\gamma\beta_1) + m\beta\beta_1 + m_1(\gamma\alpha_1+\alpha\gamma_1) + n\gamma\gamma_1 + n_1(\alpha\beta_1+\beta\alpha_1).$$

Si moltiplichino fra loro le equazioni (9), (10) e dal risultato si sottragga il quadrato della (12). Avremo:

$$(p^2+q^2+r^2)\left(\frac{1}{dd_1}-\frac{\cos^2\omega}{\Delta^2}\right)=\frac{\operatorname{sen}^2\omega}{p^2+q^2+r^2}\,\Theta,$$

cioè:

$$(13)\qquad \frac{1}{dd_1}-\frac{\cos^2\omega}{\Delta^2}=\frac{\operatorname{sen}^2\omega}{\delta\delta_1}.$$

4. Nel caso che studiamo, cioè che le superficie inviluppate siano qualisivogliano, ma che per ciascuna di esse il punto di contatto colla data sia un ombelico, chiameremo le due rette (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ *tangenti sferoconiugate*, perchè le equazioni (11) e (13), che ne esprimono le proprietà, sono identiche a quelle che si otterrebbero supponendo le inviluppate sferiche.

Al sistema delle equazioni (11), (13) equivale il seguente:

$$(14)\qquad \frac{1}{d}+\frac{1}{d_1}-\frac{2}{\Delta} = \operatorname{sen}^2\omega\left(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta_1}-\frac{2}{\Delta}\right),$$

$$(15)\qquad \frac{1}{dd_1}-\frac{1}{\Delta^2} = \operatorname{sen}^2\omega\left(\frac{1}{\delta\delta_1}-\frac{1}{\Delta^2}\right),$$

dalle quali eliminando $\operatorname{sen}^2\omega$ si ha la:

$$\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{d_1}\right)\left(\frac{1}{\delta\delta_1}-\frac{1}{\Delta^2}\right)-\frac{1}{dd_1}\left(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta_1}-\frac{2}{\Delta}\right)+\frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{\Delta\delta}+\frac{1}{\Delta\delta_1}-\frac{2}{\delta\delta_1}\right)=0,$$

relazione fra i raggi d, d_1 di due sezioni normali a tangenti sferoconiugate. Se $\omega=90^\circ$, le (14), (15) danno i raggi d, d_1 eguali ai raggi δ, δ_1; dunque:

In un punto qualunque di una data superficie curva, le linee di curvatura hanno le tangenti sferoconiugate. Le sole linee ortogonali che abbiano le tangenti sferoconiugate sono le linee di curvatura.

Noi riterremo che il raggio Δ non varii che al variare del punto (x, y, z) sulla data superficie. Ciò ha luogo per es. supponendo che le inviluppate siano sfere di raggio costante, o sfere passanti per uno stesso punto dato nello spazio, o sfere aventi i rispettivi centri in un dato piano, ecc.

Ciò premesso, le formole (11), (14), (15) esprimono che in un punto dato di

una superficie curva data, qualunque siano due sezioni normali a tangenti sferoconiugate, comprendenti l'angolo ω e aventi i raggi di curvatura d, d_1, *le quantità*:

$$\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{1}{d_1}\right):\operatorname{sen}^2\omega\,,\quad \left(\frac{1}{d}+\frac{1}{d_1}+\frac{2}{\Delta}\right):\operatorname{sen}^2\omega\,,\quad \left(\frac{1}{dd_1}-\frac{1}{\Delta^2}\right):\operatorname{sen}^2\omega$$

sono costanti.

5. Siano θ, θ_1 gli angoli che le due rette (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ comprendono con una linea di curvatura della data superficie, nel punto (x, y, z). Avremo, pel noto teorema di Eulero:

$$\frac{1}{d}=\frac{\cos^2\theta}{\delta}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\delta_1}\,,\qquad \frac{1}{d_1}=\frac{\cos^2\theta_1}{\delta}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta_1}{\delta_1}\,.$$

Questi valori sostituiti nella (14) danno:

$$\frac{\cos\theta.\cos\theta_1}{\delta}+\frac{\operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen}\theta_1}{\delta_1}=\frac{\cos(\theta-\theta_1)}{\Delta}\,,$$

ossia:

$$(16)\qquad \operatorname{tang}\theta.\operatorname{tang}\theta_1=-\frac{\frac{1}{\Delta}-\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\Delta}-\frac{1}{\delta_1}}\,,$$

relazione fra gli angoli che una linea di curvatura fa con due tangenti sferoconiugate. Cioè:

In un punto dato di una data superficie curva, il prodotto delle tangenti trigonometriche degli angoli che due rette tangenti sferoconiugate qualsivogliano fanno con una stessa linea di curvatura è costante.

Segue da ciò:

In un punto dato di una data superficie curva, le coppie di rette tangenti sferoconiugate sono in involuzione.

Le rette doppie di questa involuzione sono le tangenti di quelle due sezioni normali, egualmente inclinate ad una stessa linea di curvatura, per le quali il raggio del circolo osculatore è eguale a Δ. Tali rette doppie sono reali o immaginarie secondo che le quantità:

$$\frac{1}{\Delta}-\frac{1}{\delta}\,,\qquad \frac{1}{\Delta}-\frac{1}{\delta_1}$$

abbiano segni contrari o eguali.

È ovvio che per dedurre le proprietà delle tangenti coniugate di Dupin da quelle dimostrate in questa *nota*, basta porre $\frac{1}{\Delta}=0$.

6. Dati i coseni (α, β, γ) della direzione di una retta tangente alla superficie (1), proponiamoci di trovare i coseni $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ della tangente sferoconiugata.

Indicando con a, b, c i coseni degli angoli che la normale alla superficie (1) nel punto (x, y, z) fa cogli assi, si ha:

$$a\sqrt{p^2+q^2+r^2}=p\,,\quad b\sqrt{p^2+q^2+r^2}=q\,,\quad c\sqrt{p^2+q^2+r^2}=r\,,$$

e derivando rispetto ad s, arco di una linea qualsivoglia tracciata sulla superficie data e toccata dalla retta (α, β, γ) nel punto (x, y, z):

$$\begin{aligned} a(\sqrt{p^2+q^2+r^2})'+a'\sqrt{p^2+q^2+r^2} &= l\alpha+n_1\beta+m_1\gamma \\ b(\sqrt{p^2+q^2+r^2})'+b'\sqrt{p^2+q^2+r^2} &= n_1\alpha+m\beta+l_1\gamma \\ c(\sqrt{p^2+q^2+r^2})'+c'\sqrt{p^2+q^2+r^2} &= m_1\alpha+l_1\beta+n\gamma. \end{aligned}$$

Si moltiplichino queste equazioni ordinatamente per $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ e si sommino i risultati:

$$\begin{aligned}(a'\alpha_1+b'\beta_1+c'\gamma_1)\sqrt{p^2+q^2+r^2} = {} & l\alpha\alpha_1+l_1(\beta\gamma_1+\gamma\beta_1) \\ & +m\beta\beta_1+m_1(\gamma\alpha_1+\alpha\gamma_1) \\ & +n\gamma\gamma_1+n_1(\alpha\beta_1+\beta\alpha_1)\,,\end{aligned}$$

quindi la (12) potrà scriversi così:

$$\alpha_1(\alpha-\Delta a')+\beta_1(\beta-\Delta b')+\gamma_1(\gamma-\Delta c')=0.$$

Da questa equazione e dalle:

$$a\alpha_1+b\beta_1+c\gamma_1=0\,,\qquad \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1$$

si ricava:

$$\alpha_1=\frac{b\gamma-c\beta-\Delta(bc'-cb')}{h},\quad \beta_1=\frac{c\alpha-a\gamma-\Delta(ca'-ac')}{h},\quad \gamma_1=\frac{a\beta-b\alpha-\Delta(ab'-ba')}{h}$$

ove:

$$h^2=1+\Delta^2(a'^2+b'^2+c'^2)-2\Delta(a'\alpha+b'\beta+c'\gamma)\,.$$

Ora, per una formola di Ossian Bonnet (*) si ha:

$$a'^2+b'^2+c'^2=\frac{\cos^2\theta}{\delta^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\delta_1^2}$$

ossia, introducendo il raggio d mediante il noto teorema euleriano:

$$a'^2+b'^2+c'^2=\frac{\delta+\delta_1-d}{\delta\delta_1 d}\,.$$

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, 32e cahier, pag. 9.

Inoltre si ha:

$$a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = \frac{1}{d},$$

onde:

$$\frac{h^2}{\Delta^2} = \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{d}\right)^2 - \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{\delta_1} - \frac{1}{d}\right).$$

I coseni degli angoli che fa cogli assi la tangente coniugata ordinaria di quella data per mezzo de'coseni (α, β, γ) sono proporzionali alle quantità:

$$bc' - cb', \qquad ca' - ac', \qquad ab' - ba',$$

dunque, perchè la tangente sferoconiugata coincida colla coniugata dupiniana, dev'essere:

$$\frac{b\gamma - c\beta}{bc' - cb'} = \frac{c\alpha - a\gamma}{ca' - ac'} = \frac{a\beta - b\alpha}{ab' - ba'},$$

da cui si hanno le:

$$\alpha : \beta : \gamma = a' : b' : c'$$

che sono le equazioni di una linea di curvatura, date dal prof. Brioschi nella sua bella memoria *sulle proprietà di una linea tracciata sopra una superficie* (*). Dunque:

Le sole linee di curvatura sono simultaneamente coniugate ordinarie e sferoconiugate.

7. Il centro della curvatura ombelicale per la superficie inviluppata (3) è il punto che ha per coordinate:

$$u = x - \Delta a, \qquad v = y - \Delta b, \qquad w = z - \Delta c,$$

il quale appartiene alla normale della data superficie nel punto (x, y, z), epperò è situato sulla superficie gobba formata dalle normali della medesima superficie lungo la data linea (4). Quali sono i coseni degli angoli che fa cogli assi la normale a questa superficie gobba in quel punto (u, v, w)?

Se immaginiamo la retta tangente alla superficie gobba in questo punto e perpendicolare alla generatrice rettilinea (a, b, c), i coseni della direzione di quella retta sono evidentemente proporzionali alle quantità:

$$x' - \Delta a', \qquad y' - \Delta b', \qquad z' - \Delta c'.$$

Quindi i coseni per la normale alla superficie gobba saranno proporzionali alle quantità:

$$b(z' - \Delta c') - c(y' - \Delta b'), \quad c(x' - \Delta a') - a(z' - \Delta c'), \quad a(y' - \Delta b') - b(x' - \Delta a'),$$

cioè la normale alla superficie gobba nel punto (u, v, w) è parallela alla retta $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ tangente sferoconiugata di quella che tocca la linea data nel punto (x, y, z).

Bologna, 3 gennaio 1861.

(*) *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche.* Roma 1854.

SOPRA LA TEORICA GENERALE DELLE SUPERFICIE CURVE.

NOTA

DEL PROF. ENRICO BETTI.



Immaginiamo sopra una superficie curva qualunque una linea C, e per ogni punto m della medesima una geodetica Q che le sia perpendicolare. Indichiamo con v la lunghezza dell'arco C contato dal punto fisso O fino al punto m, e con u la lunghezza dell'arco della geodetica Q contato dal punto m fino a un punto M. Si potranno prendere u e v per coordinate del punto M qualunque della superficie.

L'equazione:

$$v = \text{costante}$$

rappresenterà una geodetica Q normale a C, e l'equazione:

$$u = \text{costante}$$

rappresenterà una curva P luogo geometrico dell'estremità delle geodetiche Q di eguale lunghezza condotte normalmente a C. I sistemi di curve P e Q saranno ortogonali tra loro.

Infatti, avremo per un elemento lineare qualunque sopra la superficie:

$$ds^2 = E du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2$$

essendo:

$$E = \frac{dx^2}{du^2} + \frac{dy^2}{du^2} + \frac{dz^2}{du^2} = 1,$$

$$F = \frac{dx}{du}\frac{dx}{dv} + \frac{dy}{du}\frac{dy}{dv} + \frac{dz}{du}\frac{dz}{dv},$$

$$G = \frac{dx^2}{dv^2} + \frac{dy^2}{dv^2} + \frac{dz^2}{dv^2};$$

e per equazione di una geodetica qualunque:

$$(1) \qquad \sqrt{EG - F^2}\, d\theta = -\frac{dF}{du} du - \frac{1}{2}\frac{dG}{du} dv,$$

essendo θ l'angolo che la geodetica fa colla linea Q che ha per equazione v=costante (*). Ora la linea G, per la quale abbiamo $dv = 0$, e $\theta = 0$, è una geodetica, quindi dovrà essere soddisfatta l'equazione (1), ponendovi $dv = 0$, $d\theta = 0$. Onde:

(*) Vedi Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Comm. novae I. R. S. Göttin? V. 6.

$$\frac{dF}{du} = 0 \quad , \quad F = \psi(v) \; .$$

Ma, quando $u = 0$, si ha $F = 0$, qualunque sia v, perchè le linee Q sono normali alla linea C; dunque sarà sempre $F = 0$, ossia le curve P e Q saranno ortogonali tra loro.

Riducendo a un punto la linea C, se ne deduce che il sistema di geodetiche Q che partono da uno stesso punto O, e il sistema di curve K luoghi geometrici dell' estremità delle curve Q che partono da O e sono di eguale lunghezza R, sono ortogonali tra loro.

Questi due teoremi sono dovuti a *Gauss*.

Se chiamiamo le curve P, curve *parallele geodeticamente* tra loro, e se chiamiamo le curve K *circonferenze geodetiche* di centro O e di raggio geodetico R, i due precedenti teoremi possono enunciarsi nel modo seguente :

Teorema 1. *Sopra una superficie qualunque le geodetiche perpendicolari a una curva C sono perpendicolari a tutte le curve, che le sono parallele geodeticamente.*

Teorema 2. *Sopra una superficie qualunque le circonferenze geodetiche sono perpendicolari ai loro raggi geodetici.*

Ora immaginiamo sopra una superficie qualunque due punti fissi F ed F' e le geodetiche che uniscono i punti F ed F' con un punto qualunque M, e indichiamo con u la lunghezza dell'arco della geodetica FM, con v la lunghezza dell' arco della geodetica F'M. È chiaro che $u = r$ rappresenterà una circonferenza geodetica C di centro F e di raggio geodetico r, e $v = r$ rappresenterà una circonferenza geodetica C' di centro F' e di raggio geodetico r', ed u e v si potranno prendere per coordinate di un punto qualunque M della superficie.

Un elemento lineare qualunque sopra la superficie sarà dato da :

$$ds^2 = du^2 + 2F\, du\, dv + dv^2,$$

e indicando con θ e θ' gli angoli che una curva qualunque sopra la superficie fa in un punto M colle circonferenze geodetiche C e C' che passano per questo punto, e con ds l'elemento di questa linea, avremo :

$$(2) \qquad \cos\theta = F\frac{dv}{ds} + \frac{du}{ds} \; , \qquad \cos\theta' = \frac{dv}{ds} + F\frac{du}{ds} \, .$$

Consideriamo ora la curva E per ogni punto della quale la somma delle distanze geodetiche da due fuochi o punti fissi della superficie, F ed F', è costante ed eguale a $2a$, e che potremo chiamare *ellisse geodetica*. La sua equazione sarà :

$$(3) \qquad u + v = 2a$$

Onde :

$$\frac{du}{ds} + \frac{dv}{ds} = 0 ,$$

e quindi l'equazioni (2) daranno :

$$\cos\theta = -\cos\theta' ,$$

dalla quale si deduce che gli angoli che l'ellisse geodetica fa in un punto M colle circonferenze geodetiche C e C' sono supplementari, ed essendo C e C' perpendicolari ai loro raggi geodetici, gli angoli che le tangenti ai raggi geodetici r ed r' fanno colla tangente all'ellisse geodetica, saranno eguali, e abbiamo il seguente :

Teorema 3. *Sopra una superficie qualunque le tangenti ai raggi vettori geodetici condotti dai fuochi a un punto qualunque di un ellisse geodetica fanno angoli eguali colla tangente all'Ellisse in questo punto.*

La curva I che è il luogo geometrico dei punti della superficie per i quali è costante ed eguale a $2b$, la differenza delle distanze geodetiche da due fuochi o punti fissi della superficie F ed F', e che chiameremo *Iperbola geodetica*, avrà per equazione :

$$(4) \qquad u - v = 2b.$$

Indicando con ds l'elemento dell'arco, si avrà :

$$\frac{du}{ds} = \frac{dv}{ds} ,$$

onde le equazioni (2) daranno :

$$\cos\theta = \cos\theta' ,$$

dalle quali si deduce il seguente :

Teorema 4. *Sopra una superficie qualunque le tangenti ai raggi vettori geodetici condotti dai fuochi a un punto qualunque di una iperbola geodetica fanno angoli eguali colla tangente alla Iperbola in quel punto.*

Ora prendiamo un ellisse E e una iperbola I geodetiche, che passino per un medesimo punto M della superficie, ed abbiano i medesimi fuochi F ed F', e indichiamo con ds l'elemento dell'ellisse, con ds' l'elemento dell'Iperbola, con φ l'angolo che l'Ellisse e l'Iperbola fanno nel punto M. Avremo :

$$(5) \qquad \cos\varphi = \cos Ex \cos Ix + \cos Ey \cos Iy + \cos Ez \cos Iz .$$

Ma :

$$\cos Ex = \frac{dx}{du}\frac{du}{ds} + \frac{dx}{dv}\frac{dv}{ds} , \quad \cos Ey = \frac{dy}{du}\frac{du}{ds} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{ds} , \quad \cos Ez = \frac{dz}{du}\frac{du}{ds} + \frac{dz}{dv}\frac{dv}{ds} ,$$

$$\cos Ix = \frac{dx}{du}\frac{du}{ds'} + \frac{dx}{dv}\frac{dv}{ds'} , \quad \cos Iy = \frac{dy}{du}\frac{du}{ds'} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{ds'} , \quad \cos Iz = \frac{dz}{du}\frac{du}{ds'} + \frac{dz}{dv}\frac{dv}{ds'} ,$$

onde :

$$\cos\varphi = \frac{du}{ds}\frac{du}{ds'} + \frac{dv}{ds}\frac{dv}{ds'} + F\left(\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds'} + \frac{du}{ds'}\frac{dv}{ds}\right).$$

Ma dall'equazioni (3) e (4) si ha:

$$\frac{du}{ds} = -\frac{dv}{ds}; \qquad \frac{du}{ds'} = \frac{dv}{ds'}$$

e quindi:

$$\cos\varphi = 0, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

e abbiamo il seguente:

Teorema 5. *Sopra una superficie qualunque l'ellissi e le iperbole geodetiche omofocali s'intersecano ad angolo retto.*

Ora prendiamo sopra una superficie qualunque un punto F ed una curva D, la geodetica perpendicolare a D che va ad un punto M qualunque della superficie, la cui lunghezza indicheremo con u, e la geodetica che unisce F con M, la cui lunghezza indicheremo con v. Potremo prendere u e v per coordinate di un punto qualunque M della superficie.

Un elemento lineare qualunque sopra la superficie sarà espresso come nel sistema di coordinate precedente, e gli angoli θ e θ' che una curva qualunque fa colla circonferenza geodetica di raggio geodetico v, e colla parallela geodeticamente a C e distante geodeticamente da C di una lunghezza u, saranno dati dalle formule (2).

L'equazione:

$$u = v$$

rappresenterà una curva luogo geometrico dei punti della superficie per i quali le distanze geodetiche dal fuoco F e dalla direttrice D sono eguali, e che chiameremo *parabola geodetica*. Indicando con ds il suo elemento, avremo:

$$\frac{du}{ds} = \frac{dv}{ds},$$

e quindi dalle (2):

$$\cos\theta = \cos\theta'.$$

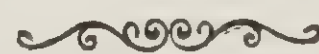
Onde si deduce il seguente:

Teorema 6. *Sopra una superficie qualunque la tangente in un punto qualunque di una Parabola geodetica fa angoli eguali col raggio vettore geodetico e colla geodetica normale alla direttrice che passano per quel punto.*



SUR LES COVARIANTS DES FORMES BINAIRES DU CINQUIÈME DEGRÉ.

PAR M. MICHAEL ROBERTS.



Considérons la forme

$$U = a_0 x^5 + 5a_1 x^4 y + 10a_2 x^3 y^2 + 10a_3 x^2 y^3 + 5a_4 xy^4 + a_5 y^5$$

et pour abréger, posons

$$H = a_1^2 - a_0 a_2, \quad G = a_0^2 a_3 - 2a_1^3 - 3a_0 a_1 a_2, \quad I = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2$$

$$J = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3$$

$$K = 4 [a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2 (a_1 a_5 - 4a_2 a_4 + 3a_3^2) - (a_0 a_5 - 3a_1 a_4 + 2a_2 a_3)^2]$$

$$K' = \frac{1}{2} \frac{dK}{da_5}$$

$$L = [a_0^2 (a_4^2 - a_3 a_5) + 3a_0 a_1 (a_2 a_5 - a_3 a_4) + 4a_0 a_2 (a_3^2 - a_2 a_4)$$
$$+ 2a_1^2 (a_3^2 - a_1 a_5) + 5a_1^2 a_2 a_4 + 3a_2^4 - 8a_1 a_2^2 a_3].$$

Ces expressions dépendent des différences des racines de l'équation

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)(x, 1)^5 = 0$$

et sont nommées par MM. Cayley et Brioschi respectivement *seminvariants* et *peninvariants* : elles sont propres d'être les sources des covariants d'après la définition, que j'ai donnée dans un Mémoire inséré dans le Numéro 14 du *Quarterly Journal.* Dans ce Mémoire j'ai démontré que tous les covariants du cinquième degré peuvent s'exprimer par U et les covariants indépendents dont les sources sont H, G, I, K'. Pour désigner un covariant quelconque j'écris entre les paranthèses la lettre, qui représente la source du covariant : pour exemple, (H) est le covariant dont la source est H, ou bien l'*hessien* de la forme dont il s'agit : (a_0) est la forme elle-même, savoir U. J'ai donné aussi dans mon Mémoire les équations suivantes

$$K'^2 = 4HI^2 - 12a_0 IJ - a_0^2 K, \quad GK' = 4H^2 I - 6a_0 HJ + a_0^2 (L - I^2)$$

qu'on peut associer avec l'équation bien connue

$$G^2 = 4H^3 - a_0^2 HI - a_0^3 J$$

et d'après les principes, que j'ai employés on tire les relations suivantes

$$(K')^2 = 4(H)(I)^2 - 12U(I)(J) - U^2 K$$

$$(G)(K') = 4(H)^2 (I) - 6U(H)(J) + U^2 [(L) - (I)^2].$$

Ces dernières équations conduisent à la conclusion importante, que tous les covariants dont les sources sont des fonctions paires des racines de l'équation

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)(x, 1)^5 = 0$$

peuvent être exprimés d'une manière rationelle par U, (H), (I), (J), (L), et l'invariant K : pour exprimer les covariants dont les sources sont des fonctions impaires des racines, il faut combiner avec ces covariants les covariants (G), et (K'). Les fonctions dont nous discutons les propriétés sont encore liées par la relation suivante

$$a_0 L^2 = 4H(HR + 3JL - I^2 J) + a_0 K(HI + a_0 J) + a_0 I(12J^2 + 2IL - I^3)$$

ou R, est la source du covariant lineaire de M. Hermite, et on a

$$a_0 R = I^3 - 9J^2 - 2IL - HK,$$

en sorte que dans la résolution d'un covariant quelconque (L) ne figure, que dans le premier degré.

Si les équations $K = 0$, $3L - I^2 = 0$ ont lieu simultanément, alors

$$3a_0 R = I^3 - 27J^2,$$

d'ou nous tirons

$$3a_0 L^2 = 4(I^3 - 27J^2) + a_0^2 I(36J^2 - I^3)$$

ce qui donne

$$27a_0^2 L^3 = 12H^2 I^2 (I^3 - 27J^2) + 3a_0^2 I^3 (36J^2 - I^3)$$

ou, en vertu de la relation qu'on suppose de subsister entre L et I

$$a_0^2 I^4 = 12H^2 (I^3 - 27J^2) + 3a_0^2 I(36J^2 - I^3)$$

ou

$$(I^3 - 27J^2)(a_0^2 I - 3H^2) = 0.$$

Il suit de là, que la simultanéité des conditions $K = 0$, $3L - I^2 = 0$ entraîne l'une, ou l'autre des équations

$$I^3 - 27J^2 = 0, \qquad a_0^2 I - 3H^2 = 0$$

dans le premier cas, l'équation

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)(x, 1)^5 = 0$$

a une racine triple; dans le second, la transformation propre à faire disparaître a_1 en même temps aneantit le coefficient a_4, et en désignant par x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 les racines de l'équation dont il s'agit, on a

$$\sum \frac{1}{4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5} = 0 \cdot$$

En représentant le covariant (L) par

$$(L, L_1, L_2, L_3, L_4)(x, y)^4$$

on a

$$L_1 = \left\{ \begin{array}{l} a_0 a_1 a_4^2 + 2a_1^2 a_3 a_4 - a_0 a_1 a_3 a_5 - a_1^2 a_2 a_5 + 2a_0 a_2^2 a_5 \\ - 5a_0 a_2 a_3 a_4 + 3a_0 a_3^3 + a_1 a_2^2 a_4 - 3a_1 a_2 a_3^2 + a_2^3 a_3 \end{array} \right.$$

$$L_2 = \left\{ \begin{array}{l} 3a_1^2 a_4^2 - 2a_1^2 a_3 a_5 + a_0 a_2 a_3 a_5 - 2a_0 a_2 a_4^2 + a_0 a_3^2 a_4 \\ + a_1 a_2^2 a_5 - 5a_1 a_2 a_3 a_4 + 2a_2^3 a_4 - a_2^2 a_3^2 + 2a_1 a_3^3 \end{array} \right.$$

$$L_3 = \left\{ \begin{array}{l} a_1^2 a_4 a_5 - a_0 a_2 a_4 a_5 + 2a_0 a_3^2 a_5 - a_0 a_3 a_4^2 - 5a_1 a_2 a_3 a_5 \\ + 2a_1 a_2 a_4^2 + 3a_2^3 a_5 - 3a_2^2 a_3 a_4 + a_1 a_3^2 a_4 + a_2 a_3^3 \end{array} \right.$$

$$L_4 = \left\{ \begin{array}{l} a_1^2 a_5^2 - a_0 a_2 a_5^2 + 3a_0 a_3 a_4 a_5 - 3a_1 a_2 a_4 a_5 + 4a_2^2 a_3 a_5 \\ - 4a_1 a_3^2 a_5 + 2a_2^2 a_4^2 - 2a_0 a_4^3 - 5a_1 a_3 a_4^2 + 3a_3^4 - 8a_2 a_3^2 a_4 \end{array} \right.$$

je trouve

$$a_0(L_1^2 - LL_2) = R(HI + a_0 J) + IJ(3L - I^2)$$

formule qui sert à déterminer l'hessein de (L), comme on peut voir dans ce qui va suivre. D'abord, il est facile de prouver que la fonction $RH + J(3L - I^2)$ a pour facteur a_0 : posons donc

$$a_0 T = RH + J(3L - I^2)$$

et T est la source d'un covariant du second degré dans les variables x, y : et si Q est la source de l'hessien de (L) on trouve

$$Q = IT - JR$$

en sorte que l'hessien de (L) est donné par la formule

$$(Q) = (I)(T) + (J)(R) .$$

Si φ est le coefficient de l'avant dernier terme de l'équation aut carrés des différences des racines d'une équation du cinquième degré (à un facteur près), je trouve

$$\varphi = K(L + I^2) - 32RJ - 16Q$$

expression, qui s'aneantit pour une racine triple, ou bien encore pour deux racines doubles.

Si $Rx + Ry$ est le covariant lineare de M. Hermite, ponons

$$W = a_0 R_1 - a_1 R$$

alors W est la source d'un covariant de la forme dont il s'agit du quatrième degré dans les variables x, y. Son cubinvariant est l'invariant gauche du 18[e] degré de M. Hermite, et en écrivant (J) de la manière suivante

$$(J, J_1, J_2, J_3)(x, y)^3$$

on trouve pour cet invariant l'expression

$$(J\ ,\ J_1\ ,\ J_2\ ,\ J_3)(R - R_1)^3.$$

On a aussi

$$WG = 2HJ(3L - I^2) - a_0 L(L - I^2) - 6a_0 IJ^2$$

$$WK' = 4HIR + 6I(3L - I^2) + a_0 LK$$

je trouve pour le quadrinvariant de la forme

$$h(L) + k(I)^2$$

$h(h + k) \times$ l'öctinvariant de la forme primitive $+ k^2K^2$ en sorte que le quadrinvariant de la forme $(L) - (I)^2$ est égal à K^2.

Le covariant dont la source est le déterminant

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{vmatrix}$$

se déduit de la formule suivante que j'ai déjà donné dans le *Quarterly, Journal*

$$\frac{1}{2500} a_0^6 \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{vmatrix} = KH + 4I(3L - I^2) + 8(I^3 - 27J^2)$$

Je terminerai en remarquant, que toutes les formes lineaires dont les degrés sont des nombres impairs à partir du cinq possédent un invariant gauche du 18e degré par rapport à leurs coefficiens : et les formes dont les degrés sont des nombres impairement pairs ont un invariant gauche du degré neuf par rapport à leurs coefficiens. Pour exemple l'invariant gauche de la forme

$$(a_0\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ a_4\ ,\ a_5\ ,\ a_6(x, y)^6$$

est le cubinvariant de la forme

$$(P_0\ ,\ P_1\ ,\ P_2\ ,\ P_3\ ,\ P_5\ ,\ P_5\ ,\ P_6\ ,\ P_7\ ,\ P_8)(x, y)^8$$

ou

$$P_0 = -5a_0 a_1 a_4 - 6a_1 a_2^2 - 2a_0 a_2 a_3 + 8a_1^2 a_3 + a_2^2 a_5$$

$$P_1 = \tfrac{1}{8}\left[2a_0 a_1 a_5 - 19a_0 a_2 a_4 - 6a_1^2 a_4 - 44a_1 a_2 a_3 - 30a_2^3 + 80a_0 a_3^2 + a_0^2 a_6\right]$$

$$P_2 = \tfrac{1}{4}\left[-2a_0 a_2 a_5 - 2a_0 a_3 a_4 + a_0 a_1 a_6 - 3a_1 a_2 a_4 + 16a_1 a_3^2 - 10a_2^2 a_3\right]$$

$$P_3 = \tfrac{1}{8}\left[-4a_0 a_3 a_5 - 2a_0 a_4^2 + a_0 a_2 a_6 + 2a_1^2 a_6 - 6a_1 a_2 a_5 - 24a_1 a_3 a_4 - 15a_2^2 a_4\right]$$

$$P_4 = \tfrac{1}{2}\left[- a_0 a_4 a_5 + a_1 a_2 a_6 + a_1 a_4^2 - a_2^2 a_5 \right]$$

$$P_5 = \tfrac{1}{8}\left[- a_0 a_4 a_6 - 2a_0 a_5^2 + 4a_1 a_3 a_6 + 6a_1 a_4 a_5 + 2a_2^2 a_6 - 24 a_2 a_3 a_5 + 15 a_2 a_4^2 \right]$$

$$P_6 = \tfrac{1}{4}\left[- a_0 a_5 a_6 + 2a_1 a_4 a_6 + 2a_2 a_3 a_6 + 3a_2 a_4 a_5 - 16 a_3^2 a_5 + 10 a_3 a_4^2 \right]$$

$$P_7 = \tfrac{1}{8}\left[- 2a_1 a_5 a_6 + 19 a_2 a_4 a_6 + 6a_2 a_5^2 - 44 a_3 a_4 a_5 + 30 a_4^3 - 8a_3^2 a_6 - a_0 a_6^2 \right]$$

$$P_8 = 5a_2 a_5 a_6 + 6a_4^2 a_5 - 2a_3 a_4 a_6 - 8a_3 a_5^2 - a_1 a_6^2 .$$

Collège de la Trinitè a Dublin
le 5 Avril 1861.

SUR LA SURFACE PARALLÈLE A' L'ELLIPSOIDE.

PAR M. A. CAYLEY.



Il y a pour la surface parallèle à l'ellipsoide une solution tout à fait semblable à celle pour la courbe parallèle à l'ellipse. En effet soit

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$$

l'équation de l'ellipsoïde ; k la distance de la surface parallèle en prenant cette distance sur la normale exterieure au point (X, Y, Z) et en écrivant pour abreger

$$\sqrt{\frac{X^2}{a^4}+\frac{Y^2}{b^4}+\frac{Z^2}{c^4}}=\frac{k}{\lambda}$$

on trouve pour les coordonnés (x, y, z) de l'extremité de la normale

$$x=X\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right),\quad y=Y\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right),\quad z=Z\left(1+\frac{\lambda}{c^2}\right)$$

et en substituant pour X, Y, Z les valeurs données par ces équations, on obtient

$$\frac{a^2x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{b^2y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{c^2z^2}{(c^2+\lambda)^2}=1$$

$$\frac{\lambda^2x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{\lambda^2y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{\lambda^2z^2}{(c^2+\lambda)^2}=k^2.$$

Or ces équations donnent

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1+\frac{k^2}{\lambda}$$

$$\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}=\frac{k^2}{\lambda^2}$$

et la seconde équation est la derivée par rapport à λ de la première. C'est à dire en obtient l'équation de la surface parallèle en égalant à zero le discriminant par rapport à λ de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1+\frac{k^2}{\lambda}$$

on autrement dit, la surface parallèle est l'enveloppe par rapport a λ de cette équation. En multipliant par $\lambda(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)$, on aura une équation du quatrième ordre,

dont le discriminant egalé à zero donne l'équation de la surface: on voit sans peine, que cette équation sera de l'ordre 10.

J'avais à peine trouvé cette métode, quand j'ai appris, que le problème était déjà resolu par M. M. Salmon et W. Roberts. M.r Salmon considére la surface comme lieu des centres des sphères rayon k, qui touchent à l'ellipsoide $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$, ce qui lui donne tout de suite le théorème, que voici on savoir on obtien l'équation de la surface parallèle, en égalant à zero le discriminant par rapport à λ, du discriminant par rapport à (X, Y, Z), de l'équation

$$\lambda\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}-1\right)+(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=0$$

cette solution est donnée en passant dans une note publiée dans le n.° de Septembre 1860 des nouvelles annales (Terquem, et Gerono). En formant le discriminant par rapport à X, Y, Z on trouve l'équation en λ ci-dessus donnée.

La solution de M. W. Roberts n'avait pas été publiée: il a bien voulu me permettre d'en faire part aux géométres. En considerant une section circulaire de l'ellipsoïde, l'enveloppe des sphéres rayon k ayant leur centres sur cette section, sera une surface annulaire, et l'enveloppé des surfaces annulaires qui correspondent aux différentes sections circulaires de l'ellipsoïde sera la surface parallèle. Dans la figure (qui est censée située dans le plan des axes le plus grand, et le plus petit soit $O\xi$ la trace de la section circulaire centrale $O\zeta$ le diametre perpendiculaire AB la trace d'une section quelconque parallèle à la section circulaire centrale: soit de plus $AB=2\delta$, et (α, γ) les cordonnés du point C qui est le centre de la section AB. En prenant pour un moment ce point C pour origine, et l'axe de η parallèle à l'axe moyen, la surface annulaire sera l'enveloppe de la sphére.

$$(\xi-\delta\cos\varphi)^2+(\eta-\delta\sin\varphi)^2+\zeta^2=k^2$$

(où φ est un paramètre arbitraire); donc l'équation de la surface annulaire sera

$$4\delta^2(\xi^2+\eta^2)=(\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\delta^2-k^2)^2$$

ou en prenant le centre de l'ellipsoïde pour origine cette équation sera

$$4\delta^2(\xi^2+\eta^2-2\alpha\xi+\alpha^2)=(\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\delta^2-k^2-2\alpha\xi-2\gamma\zeta-\alpha^2-\gamma^2)^2.$$

Mais par les propriétés de l'ellipse on a, $\gamma=l\alpha$ et $\delta^2=m+n\alpha^2$, ou l, m, n sont des quantités constantes fonctions des axes a, b, c de l'ellipsoïde. L'équation de la

surface annulaire devient ains

$$4(m+n\alpha^2)(\xi^2+\eta^2-2\alpha\xi+\alpha^2)=[\xi^2+\eta^2+\zeta^2+m-k^2-2\alpha(\xi+l\zeta)+\alpha^2(n+1+l^2)]^2$$

équation qui contient le paramètre variable α quatrième degré, et en égalant a zero le discriminant, par rapport à α, de cette équation on obtiendrait l'équation de la surface parallele. A propos de cette solution je remarque qu'en considerant le surface annulaire, enveloppe des sphéres, rayon k ayant leurs centres sur l'ellipse

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-1=0$$

on obtient sans peine le système d'équations

$$\frac{a^2x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{b^2y^2}{(b^2+k)^2}=1, \qquad \frac{\lambda^2x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{\lambda^2y^2}{(c^2+\lambda)^2}=k^2-z^2$$

et de là l'équation de la surface annulaire s'obtient en égalant à zero le discriminant par rapport a λ de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1+\frac{k^2-z^2}{\lambda}$$

c'est à due en égalant à zero le discriminant d'une fonction *cubique* de λ. Mais en supposant que l'ellipse devient un cercle, l'on n'aura qu'une fonction quadratique de λ; c'est la pour quoi la surface annulaire considerée par M.r Roberts s'exprime sous une forme assez simple pour qu'on puisse s'en servir pour trouver l'équation de la surface parallèle. Soit à present l'ellipse section de l'ellipsoïde

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$$

par un plan quelconque

$$lX+mY+nZ=p.$$

Il est clair, que l'équation de la surface annulaire doit se trouver de même à moyen d'une fonction cubique de λ. Pour verifier cela, je remarque que l'on à trouver l'enveloppe de la sphère $(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=k^2$, où les parametres X, Y, Z sont lies par les deux équations, que viennent d'être mentionnées : cela donne, tout de suite pour la surface annulaire le système des équations

$$x-X-\lambda\frac{X}{a^2}-\mu l=0$$

$$y-Y-\lambda\frac{Y}{b^2}-\mu m=0$$

$$z-Z-\lambda\frac{Z}{c^2}-\mu n=0$$

où λ, μ sont des paramètres arbitraires : ces équations donnent

$$X = \frac{a^2(x - \mu l)}{a^2 + \lambda}, \quad Y = \frac{b^2(y - \mu m)}{b^2 + \lambda}, \quad Z = \frac{c^2(z - \mu n)}{c^2 + \lambda}$$

et delà en mettant pour abregér

$$\frac{la^2x}{a^2 + \lambda} + \frac{mb^2y}{b^2 + \lambda} + \frac{nc^2z}{c^2 + \lambda} - p = P$$

$$\frac{l^2a^2}{a^2 + \lambda} + \frac{m^2b^2}{b^2 + \lambda} + \frac{n^2c^2}{c^2 + \lambda} = Q$$

on trouve à moyen de l'équation lineaire

$$Q\mu - P = 0, \quad \text{ou} \quad \mu = \frac{P}{Q}$$

et les deux autres équations donnent alors

$$\frac{a^2(x - \mu l)^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{b^2(y - \mu m)^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{c^2(z - \mu n)^2}{(c^2 + \lambda)^2} = 1$$

$$\frac{(\lambda x + a^2\mu l)^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{(\lambda y + b^2\mu m)^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{(\lambda z + c^2\mu n)^2}{(c^2 + \lambda)^2} = k^2$$

où μ est censé denoter le valeur $\frac{P}{Q}$. Je deduis de là les équations

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} + \frac{\mu^2}{\lambda} Q = 1 + \frac{k^2}{\lambda}$$

$$\frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2}$$
$$+ 2\left(\frac{a^2lx}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{b^2my}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{c^2nz}{(c^2 + \lambda)^2}\right)\frac{\mu}{\lambda}$$
$$+\left(\frac{a^4l^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{b^4m^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{c^4n^2}{(c^2 + \lambda)^2}\right) = \frac{k^2}{\lambda^2}.$$

Soient P', Q' les derivées de P, Q par rapport à λ, on a

$$-P' = \frac{la^2x}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{mb^2y}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{nc^2z}{(a^2 + \lambda)^2}$$

$$-Q' = \frac{l^2a^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{m^2b^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{n^2c^2}{(c^2 + \lambda)^2}$$

et delà aussi

$$Q + \lambda Q' = \frac{a^4l^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{b^4m^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{c^4n^2}{(c^2 + \lambda)^2}.$$

A moyen de ces équations, et en substituant pour μ la valeur $\frac{Q}{P}$. les deux équations ci-dessus données deviennent

$$\left(\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1-\frac{k^2}{\lambda}\right)Q+\frac{P^2}{\lambda}=0$$

$$\left(\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}-\frac{\mu^2}{\lambda^2}\right)Q-2\ \frac{PP'}{\lambda}+(Q+\lambda Q')\frac{P^2}{Q\lambda^2}=0$$

et en differentiant la première équation par rapport à λ en obtient

$$-\left(\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}-\frac{k^2}{\lambda^2}\right)Q$$
$$+\left(\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1-\frac{k^2}{\lambda}\right)Q'+\frac{2PP'}{\lambda}-\frac{P^2}{\lambda^2}=0$$

et cette équation se reduit à une identité à moyen des deux équations : donc l'équation de la surface annulaire s'obtient égalant à zero le discriminant par rapport à λ de l'équation

$$\left(\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1-\frac{k^2}{\lambda}\right)Q+\frac{P^2}{\lambda}=0$$

C'est à dire en substituant pour P, Q leurs valeurs

$$\left(\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1-\frac{k^2}{\lambda}\right)\left(\frac{a^2l^2}{a^2+\lambda}+\frac{b^2m^2}{b^2+\lambda}+\frac{c^2n^2}{c^2+\lambda}\right)$$
$$+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{a^2lx}{a^2+\lambda}+\frac{b^2my}{b^2+\lambda}+\frac{c^2nz}{c^2+\lambda}-p\right)^2=0\,.$$

Dans cette équation on reunissant les termes

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}\ \frac{a^2l^2}{a^2+\lambda}+\frac{1}{\lambda}\ \frac{a^4l^2x^2}{(a^2+\lambda)^2}\,.$$

On voit que ces termes se reduissent à

$$\frac{(a^2+\lambda)\dfrac{a^4l^2x^2}{\lambda}}{(a^2+\lambda)}\,,\quad=\frac{a^4l^2x^2}{\lambda(a^2+\lambda)}$$

et de même pour les termes semblables en y, z. Donc en multipliant par

$$\lambda(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)$$

les denominateurs desparaissent, et l'équation est réellement de l'ordre 3 par rapport à λ.

La section sera circulaire en supposant

$$l=\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}, \quad m=0, \quad n=\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}.$$

Cela donné

$$\frac{a^2l^2}{a^2+\lambda}+\frac{b^2m^2}{b^2+\lambda}+\frac{c^2n^2}{c^2+\lambda}=\frac{\frac{a^2}{b^2}-1}{a^2+\lambda}+\frac{1-\frac{c^2}{b^2}}{c^2+\lambda}=\frac{(a^2-c^2)(b^2+\lambda)}{b^2(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)}.$$

L'équation en λ devient ainsi

$$\left(\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{c^2}{c^2+\lambda}-1-\frac{k^2}{\lambda}\right)(a^2-c^2)(b^2+\lambda)$$
$$+\frac{b^2(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)}{\lambda}\left(\frac{a^2x\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}}{a^2+\lambda}+\frac{c^2z\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}}{c^2+\lambda}-p\right)^2=0$$

la quelle se reduit a

$$x^2[\lambda(a^2-c^2)+c^2(a^2-b^2)]+y^2\lambda(a^2-c^2)+z^2[\lambda(a^2-c^2)+a^2(b^2-c^2)]$$
$$+2acxz\sqrt{a^2-b^2}.\sqrt{b^2-c^2}$$
$$-2bp[ax(c^2+\lambda)\sqrt{a^2-b^2}+by(a^2+\lambda)\sqrt{b^2-c^2}]$$
$$-2(a^2-c^2)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)$$
$$+b^2p^2(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)=0$$

équation de l'ordre 2 par rapport à (x, y, z) par rapport à λ, et par rapport a p. Donc en égalant à zero le discriminant par rapport à λ, on obtiendrait une équation du quatrième ordre par rapport aux coordonnés (x, y, z), et par rapport à p; on aurait ainsi l'équation de la surface annulaire de M^r. Roberts, rapportée aux axes de l'ellipsoïde, et en termes des quantités a, b, c, k et du paramètre p qui donné la position du plan

$$X\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}+Y\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}-p=0$$

de la section circulaire.

M^r. Roberts a donné (*Comptes Rendus* Nov^e. 14, 1859) le theorème que voici qui se rapporte à une surface primitive quelconque: – « Soit **D** la surface semblable à la primitive en multipliant par 2 ses rayons vecteurs, et soit **P** la surface parallèle ou equidistante de **D** par la longueur constante k, l'équation qui résulte de la substitution de $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ au lieu de k dans l'équation de **P**, coincide avec l'équation de la première derivée negative de la surface primitive » – ou je rappéle,

que dans la théorie des surfaces derivées de M. Hirst la *première derivé negative* est la surface enveloppe des plans conduits par les points de la surface primitive perpendiculairement aux rayons menés par un point quelconque. Pour demontrer la théorème prenons $f(X, Y, Z) = 0$ pour l'équation de la surface primitive : en supposant que (X, X, Z) soient les coordonnés d'un point de cette surface (2X, 2Z, 2Z) seront les coordonnés d'un point de la surface D, et la surface parallèle à D sera l'enveloppé des sphères

$$(x - 2X)^2 + (y - 2Y)^2 + (z - 2Z)^2 = k^2$$

avec la relation $f(X, Y, Z) = 0$ entre les paramètres. Or on peut *avant d'effectuer* l'élimination écrire $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ au lieu de k, l'équation devient ainsi

$$X(x - X) + Y(y - Y) + Z(z - Z) = 0$$

avec cette même relation $f(X, Y, Z) = 0$ entre les paramètres; or cette équation est celle d'un plan conduit par le point (X, Y, Z) perpendiculairement au rayon mené par l'origine des coordonnés : et ce dernier système donné ainsi l'équation de la surface derivée.

L'équation de la surface parallèle de l'ellipsoïde est trouvé en égalant a zero le discriminant par rapport à λ de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1 + \frac{k^2}{\lambda}.$$

Donc en écrivant dans cette équation $x^2 + y^2 + z^2$ au lieu de k, et $4a^2$, $4b^2$, $4c^2$ au lieu de a^2, b^2, c^2 on doit obtenir l'équation de la derivée de l'ellipsoïde, les rayons étant menés par le centre Pour me confermer à la notation de mon Mémoire « Sur la surface qui est l'enveloppé des plans conduits par les points d'une ellipsoïde perpendiculairement aux rayons menés par le centre » (*Journal* tom. II. pp. 168. 179 Mai-Juin 1859). J'écris aussi $- 2\theta$ au lieu de λ : l'équation en λ devient aussi

$$\frac{x^2}{4a^2 - 2\theta} + \frac{y^2}{4b^2 - 2\theta} + \frac{z^2}{4c^2 - 2\theta} = 1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2\theta}$$

laquelle se réduit tout de suite à

$$\frac{x^2}{2 - \frac{\theta}{a^2}} + \frac{y^2}{2 - \frac{\theta}{b^2}} + \frac{z^2}{2 - \frac{\theta}{c^2}} = \theta$$

et la surface derivée est l'enveloppe de cette équation en θ, resultat trouvé dans le mémoire, que ie viens de mentionner.

Mais je dois à M^r. Roberts la remarque que reciproquement l'équation en λ pour la surface parallèle peut se deduire des formules de ce mémoire. En effet en prenant $a \cos\alpha$, $b \cos\beta$, $c \cos\gamma$ pour les coordonnés d'un point de l'ellipsoïde (on a comme à l'ordinaire $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$) l'équation du plan perpendiculaire au rayon par le centre sera

*

$$ax\cos\alpha + by\cos\beta + cz\cos\gamma = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma$$

et l'enveloppe de cette équation, est l'enveloppe par rapport à θ de l'équation

$$\frac{x^2}{2-\frac{\theta}{a^2}} + \frac{y^2}{2-\frac{\theta}{\theta^2}} + \frac{z^2}{2-\frac{\theta}{c^2}} = \theta$$

Donc *en general*

L'enveloppe de

$$l\cos\alpha + m\cos\beta + n\cos\gamma = p\cos^2\alpha + q\cos^2\beta + r\cos^2\gamma$$

(où comme auparavant $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$) sera l'enveloppe par rapport à θ de l'équation

$$\frac{l^2}{2p-\theta} + \frac{m^2}{2q-\theta} + \frac{n^2}{2r-\theta} = \theta.$$

Or la surface parallèle à l'ellipsoïde est l'enveloppe de

$$(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 = k^2$$

ou en écrivant $a\cos\alpha$, $b\cos\beta$, $c\cos\gamma$ au lieu de X, Y, Z cette surface est l'enveloppe de

$$l\cos\alpha + m\cos\beta + n\cos\gamma = p\cos^2\alpha + q\cos^2\beta + r\cos^2\gamma$$

en posant $\rho = x^2 + y^2 + z^2$, et

$$l = 2ax, \quad m = 2by, \quad n = 2cz$$
$$p = \rho + a^2 - k^2, \quad q = \rho + b^2 - k^2, \quad r = \rho + c^2 - k^2.$$

Donc cette surface sera l'enveloppe par rapport à θ de l'équation

$$\frac{4a^2x^2}{2(\rho + a^2 - k^2) - \theta} + \frac{4b^2y^2}{2(\rho + b^2 - k^2) - \theta} + \frac{4c^2z^2}{2(\rho + c^2 - k^2) - \theta} = \theta$$

Et en écrivant $(2\rho - k^2) - \theta = 2\lambda$ cette équation devient

$$\frac{a^2x^2}{a^2+\lambda} + \frac{b^2y^2}{b^2+\lambda} + \frac{c^2z^2}{c^2+\lambda} = \rho - k^2 - \lambda.$$

C'est à dire

$$x^2 + y^2 + z^2 - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{b^2+\lambda}\right) = \rho - k^2 - \lambda.$$

Ou enfin

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1 + \frac{k^2}{\lambda}.$$

Ce qu'il s'agissait de faire voir. Je reserve à une autre occasion, la discussion de la forme, et des singularités de la forme, et des singularités de la surface parallèle à l'ellipsoïde.

2 Stone Buildings W. C.
Londres 7[me] Nov[re]. 1860.

NOTA

SOPRA DUE PROPOSIZIONI DI *NAVIER* INTORNO ALLA CURVATURA DELLE CURVE A DOPPIA CURVATURA.

DEL SIG. PROF. FELICE CHIÒ

DA TORINO.

Il celebre Navier nel suo Corso di Analisi infinitesimale, stampato nel 1840, e intitolato: *Résumé des Leçons d'Analyse données à l'École polytechnique*, a proposito della superficie polare, di quella formata dalle tangenti, e della linea de'centri de'circoli osculatori d'una curva a doppia curvatura, si esprime ne' seguenti termini (tomo 1.° n° 246 pagina 252).

« Les centres de la première courbure de la courbe proposée, qui ont été déterminés dans les numeros 236 et suivans (sono le formole note che determinano il circolo osculatore d'una curva nello spazio) sont nécessairement situés sur la surface développable lieu des centres des sphères osculatrices (cioè sulla superficie polare). Concevons l'ensemble des plans osculateurs de la courbe proposée; ils forment par leurs intersections successives une nouvelle surface développable (la superficie delle tangenti alla curva, ossia l'inviluppo dei piani osculatori) qui rencontre à angle droit la surface développable dont il a été question ci-dessus, et qui est formée par les intersections successives des plans normaux (cioè la stessa superficie polare). La ligne d'intersection de ces deux surfaces (cioè la superficie polare, e quella delle tangenti) est le lieu des centres de la première courbure .»

Ecco due proposizioni di Navier, che, come vedesi, si possono enunciare in questi termini.

1.° In una curva a doppia curvatura la superficie polare, e quella delle tangenti si tagliano ad angolo retto, ossia sono fra loro ortogonali.

2.° Il luogo geometrico de'centri de'circoli osculatori di una curva a doppia curvatura è la intersezione della superficie polare con quella delle tangenti, ossia è l'intersezione della superficie inviluppo de'piani normali colla superficie inviluppo de'piani osculatori.

Ma queste due proposizioni, se non erro, sono ambedue inesatte. Questo è il giudizio al quale conduce l'analisi di questa Nota in cui mi propongo di mettere in luce le vere proprietà che legano fra di loro le tre superficie, la polare, quella delle tangenti, e la superficie delle normali principali, ossia condotte ne'rispettivi piani osculatori, delle quali, come è noto, le due prime sono superficie sviluppabili, e l'ultima è una superficie *gobba*.

§. 1.

Comincieremo per dimostrare analiticamente che la superficie delle tangenti d'una curva a doppia curvatura è identica colla superficie inviluppo de'piani osculatori.

Siano tre assi ortogonali che chiameremo assi delle x, delle y, e delle z. Sia t l'ordinata della curva proposta nel senso delle z, e $f(t)$, e $\varphi(t)$ le altre due coordinate la prima nel senso delle x, l'altra nel senso delle y.

Siano inoltre x, y, z le tre coordinate correnti della tangente alla curva nel punto $[t, f(t), \varphi(t)]$ avremo per le equazioni di questa tangente:

$$(1) \qquad x - ft = f't(z - t)$$

$$(2) \qquad y - \varphi t = \varphi' t\,(z - t).$$

La superficie delle tangenti si avrà, come è noto, eliminando t fra queste ultime equazioni. Ma considerando in queste la t come una variabile indipendente, il loro sistema basterà a rappresentare la superficie delle tangenti in discorso, la quale sarà così espressa non da una sola equazione ma da due, che oltre le tre coordinate correnti della superficie contengono il parametro indeterminato t.

Ciò posto cerchiamo l'inviluppo de'piani osculatori della curva proposta. L'equazione del piano osculatore nel punto $(t, ft, \varphi t)$ è, come è noto,

$$(3) \qquad X(x - ft) + Y(y - \varphi t) + Z(z - t) = 0$$

ove

$$X = -\varphi'' t\,,\quad Y = f'' t\,,\quad Z = f' t \varphi'' t - \varphi' t f'' t\,,$$

assumendo t per variabile indipendente.

Onde ottenere la superficie cercata bisognerà differenziare la (3) rispetto a t, considerando x, y, z, come costanti. Avremo dunque

$$(x - ft)\frac{dX}{dt} + (y - \varphi t)\frac{dY}{dt} + (z - t)\frac{dZ}{dt} - Xf't - Y\varphi' t - Z = 0\,.$$

Ma abbiamo per identità

$$Xf't + Y\varphi' t + Z = 0.$$

Quindi l'equazione precedente si riduce a

$$(4) \qquad (x - ft)\frac{dX}{dt} + (Y - \varphi t)\frac{dY}{dt} + (Z - t)\frac{dZ}{dt} = 0\,.$$

L'inviluppo de'piani osculatori si otterrà eliminando t fra le due (3) e (4).

Ma alle due equazioni (3) e (4) si possono sostituire le due seguenti

$$(3') \qquad (x - ft)(YdX - XdY) + (z - t)(YdZ - ZdY) = 0$$

$$(4') \qquad (y - \varphi t)(XdY - YdX) + (z - t)(XdZ - ZdX) = 0$$

delle quali la prima si trova eliminando $y - \varphi t$ fra (3) e (4), e la seconda si ha eliminando fra le stesse due (3) e (4) $x - ft$.

Ora giova osservare che si ha per identità

$$(\text{YdX} - \text{XdX}) = - (\text{YdZ} - \text{ZdY})f't$$

$$(\text{XdY} - \text{YdX}) = - (\text{XdZ} - \text{ZdX})\varphi't.$$

pertanto le due equazioni (3') e (4') si ridurranno alle seguenti

$$(3'') \qquad x - ft = f't(z - t), \qquad\qquad (4'') \qquad y - \varphi t = \varphi' t(z - t)$$

le quali coincidono colle equazioni (1) e (2).

Adunque le due superficie quella delle tangenti, e l'inviluppo de'piani osculatori sono identiche fra di loro : ciò che si voleva dimostrare.

In seguito noi rappresenteremo indifferentemente la superficie delle tangenti o col sistema delle equazioni (1) e (2), o col sistema delle due (3) e (4).

§. 2.

Proponiamoci qui di trovare l'intersezione tra la superficie delle tangenti, e la superficie polare. Si sa che l'equazione di quest'ultima si ottiene eliminando la variabile t tra le due equazioni

$$(5) \qquad (x - ft)f't + (y - \varphi t)\varphi' t + z - t = 0$$

$$(6) \qquad (x - ft)f''t + (y - \varphi t)\varphi'' t - (f't)^2 - (\varphi' t)^2 - 1 = 0$$

delle quali la prima è l'equazione del piano normale alla curva nel punto $(t, ft, \varphi t)$, e l'altra il risultato eguagliato a zero della differenziazione del primo membro della prima rispetto alla variabile t riguardando x, y, z come costanti.

Ma il sistema delle due (5) e (6) basterà a rappresentare la superficie polare ivi riguardando t come un parametro variabile. Noi in questo luogo considereremo appunto le due superficie in discorso di cui vuolsi l'intersezione come rappresentate, quella delle tangenti dal sistema delle equazioni (3) e (4), e la polare dal sistema delle due (5) e (6).

Sotto questo punto di vista, la quistione di trovare le equazioni della loro mutua intersezione esige un certo accorgimento per essere risolta.

Prima di tutto è essenziale di notare che supponendo uno stesso valore a t sì nelle equazioni (3) e (4) che nelle altre due (5) e (6), le due prime rappresenterebbero la retta tangente, e le ultime due la retta polare, ambidue relative allo stesso punto della curva, cioè al punto $(t, ft, \varphi t)$. Quindi le quattro equazioni (3), (4), (5) e (6) prese insieme, e supponendo sempre t lo stesso in tutte e quattro, rappresenterebbero evidentemente non una linea, ma un punto solo, cioè il punto d'incontro

tra la tangente, e la retta polare, relative al medesimo punto della curva. Aggiungiamo che questo punto d'incontro generalmente sarebbe *immaginario* cioè non esisterebbe fuorchè nel caso particolare in cui il raggio del circolo osculatore pel punto della curva che si considera, fosse nullo.

Adunque se vuolsi rappresentare l'intersezione delle due superficie in discorso per mezzo del sistema delle quattro equazioni (3), (4), (5) e (6) è necessario di supporre nel tempo stesso la t nelle (3) e (4) differente dalla t nelle (5) e (6). In altri termini ogni punto d'incontro tra le due superficie è sì bene un punto d' incontro tra una retta tangente, ed una retta polare; ma queste due rette devono necessariamente riferirsi a due punti differenti della curva proposta.

Ciò ritenuto, per maggior chiarezza rappresentisi con t' un valor qualunque di t nel sistema delle equazioni (5) e (6) mentre t continua a rappresentare un valor qualunque di questa variabile differente da t' nelle due (3) e (4).

L'intersezione cercata delle due superficie, la polare, e quella delle tangenti sarà così rappresentata dal sistema delle quattro equazioni seguenti :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} X(x - ft) + Y(y - \varphi t) + Z(z - t) = 0 \\ (x - ft)\dfrac{dX}{dt} + (y - \varphi t)\dfrac{dY}{dt} + (z - t)\dfrac{dZ}{dt} = 0 \\ (x - ft')f't' + (y - \varphi t')\varphi' t' + z - t' = 0 \\ (x - ft')f''t' + (y - \varphi t')\varphi'' t' - (f't')^2 - (\varphi' t')^2 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

ove X, Y, Z hanno sempre i valori riportati nel 1.° §.°

Queste equazioni rappresentano la linea cercata col soccorso di due parametri t, e t'. Ma giova osservare che la variabile t' deve supporsi funzione della prima t. Infatti eliminando x, y, z fra tre delle quattro equazioni, e sostituendo i valori trovati in t e t' di x, y, z, nella quarta, si avrà una equazione di condizione fra le sole t, e t'; donde risulta che l'una d'esse è funzione dell'altra. Ma i loro valori simultanei saranno senza dubbio differenti, come già abbiamo più sopra rimarcato.

§. 3.

Avendo noi nel §.° precedente stabilite le equazioni che determinano l'intersezione della superficie polare con quella delle tangenti, è ora prezzo dell'opera di riscontrare sì fatte equazioni con quelle che rappresentano il luogo geometrico de'centri de'circoli osculatori alla curva proposta , mostrando in che cosa le une differiscano dalle altre.

Considerando il centro del circolo osculatore in un punto qualunque della curva come il punto d'incontro tra il piano osculatore, ed i due piani normali consecutivi,

le sue tre coordinate, che designeremo per x, y, z saranno date dalle tre equazioni seguenti :

$$(8)\quad \begin{cases} (x - ft)f't + (y - \varphi t)\varphi' t + z - t = 0 \\ (x - ft)f''t + (y - \varphi t)\varphi'' t - 1 - (f't)^2 - (\varphi' t)^2 = 0 \\ X(x - ft) + Y(y - \varphi t) + Z(z - t) = 0 \end{cases}$$

ove X, Y, Z hanno sempre gli stessi valori che ne' §§ precedenti.

È evidente che considerando t come variabile suscettiva di ricevere tutti i valori delle ordinate de'punti della curva parallele all'asse delle z, le tre equazioni precedenti rappresenteranno la linea cercata luogo geometrico de'centri de'circoli osculatori. Che se si eliminerà t successivamente fra due sistemi ciascuno di due equazioni prese fra le tre ultime, otterremo le due equazioni nelle sole x, y, z proprie a rappresentare la linea in discorso.

Ciò posto confrontando fra di loro il sistema delle equazioni (7), e il sistema delle equazioni (8), e ritenendo che per una linea a doppia curvatura nelle equazioni (7) t' è differente da t, si vede che la linea espressa dal primo sistema è differente dalla linea rappresentata dal secondo. Imperocchè onde i due sistemi fossero equivalenti, e rappresentassero una sola, e stessa linea, bisognerebbe che le tre equazioni del sistema (8) coincidessero colla prima, terza, e quarta del sistema (7). Ma a questo effetto bisognerebbe che nel sistema (7) t' fosse eguale a t : locchè, nel caso d'una curva a doppia curvatura, è impossibile, come già fu da noi dimostrato. Conchiuderemo adunque che in una curva a doppia curvatura, l'intersezione della superficie polare, e di quella delle tangenti non è identica col luogo geometrico de'centri de'circoli osculatori della curva proposta. Pertanto è erronea la seconda proposizione di Navier, che noi abbiamo riportata nel preambolo di questa Nota.

Non perdiamo di mira che la presente conclusione riposa su questo fatto : che nel sistema delle equazioni (7) i valori simultanei di t, e t' sono fra loro differenti. È però bene di osservare che questi valori di t e t' sarebbero sempre fra loro eguali, e così queste due variabili si ridurrebbero ad una sola se la seconda equazione dello stesso sistema (7) cioè

$$(x - ft)\frac{dX}{dt} + (Y - \varphi t)\frac{dY}{dt} + (Z - t)\frac{dZ}{dt} = 0$$

fosse vera per identità.

Questo caso ha luogo quando la curva proposta è piana, perchè allora, come si sa,

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dY}{dt} = \frac{dZ}{dt} = 0 .$$

Allora le quattro equazioni del sistema (7) si riducono alle tre del sistema (8). Quindi

si conchiuderà che nel caso d'una curva piana il luogo geometrico de'centri de'circoli osculatori si confonde colla intersezione della superficie delle tangenti, e della polare. Locchè è d'altronde evidente, perchè in questo caso la superficie delle tangenti ossia l'inviluppo de'piani osculatori si riduce al piano stesso della curva, e la superficie polare diventa una superficie cilindrica che ha per sezione retta col piano della curva la stessa sviluppata di questa curva.

§. 4.

Volendo riguardare il luogo geometrico de'centri de'circoli osculatori d'una curva a doppia curvatura, come l'intersezione della superficie polare con un'altra, è naturale di domandare quale sia quest'altra superficie, che interseca la polare secondo la linea de'centri de'circoli osculatori.

È evidente che infinite superficie possono immaginarsi, le quali passino tutte per la detta linea de' centri de' circoli osculatori. Sotto questo aspetto la quistione testè enunciata ammette una infinità di soluzioni. Però fra le diverse superficie che intersecano la polare secondo la linea de'centri de'circoli osculatori, le equazioni (8) ne indicano una, che merita tutta la nostra attenzione. Infatti le tre equazioni (8) si possono considerare come quelle che rappresentano l'intersezione tra la superficie polare espressa dalla prima e seconda di quelle equazioni, e la superficie determinata dalla prima, e terza di quelle stesse equazioni. Ma quest'ultima superficie è evidentemente formata da tutte le normali principali, cioè condotte ne'rispettivi piani osculatori della curva. Arroge che quest'ultima superficie rigata non è sviluppabile, perchè si sa che due normali *principali* consecutive non possono mai incontrarsi, donde risulta la proprietà per così dire *negativa* della linea de'centri de'circoli osculatori di non essere mai una sviluppata di una curva a doppia curvatura.

Del resto questa superficie gobba delle normali principali che evidentemente interseca la superficie delle tangenti secondo la stessa curva proposta ed incontra (come abbiamo rammentato) la superficie polare secondo la linea de'centri de'circoli osculatori gode della proprietà rimarcabile di essere tangente a ciascuna di queste ultime superficie lungo tutta la linea della sua intersezione con caduna di esse.

Infatti prendiamo un punto della curva proposta. In esso il piano tangente alla superficie delle tangenti è lo stesso piano osculatore. Ora noi diciamo che questo piano osculatore è anche il piano tangente della superficie delle normali principali nel punto che si considera. Infatti il piano tangente ad una superficie rigata in un punto qualunque è quello che contiene la generatrice e una tangente condotta per quel punto. Ora il piano osculatore contiene per ipotesi la normale che è una generatrice della superficie di cui è discorso, e la tangente alla curva proposta, la quale è evidente-

mente anche una tangente della stessa superficie. Adunque il piano osculatore è lo stesso piano tangente a questa superficie nel punto che si considera. Lo stesso ragionamento vale per ogni altro punto della curva proposta considerata come la intersezione tra la superficie delle tangenti, e quella delle normali principali. Adunque queste superficie non solo si incontrano, ma si toccano in tutti i punti della loro mutua intersezione.

Prendiamo ora un punto qualunque della linea de'centri de'circoli osculatori considerata come la intersezione tra la superficie delle normali principali, e la superficie polare. Il piano tangente a quest'ultima superficie nel punto che si considera è, come si sa, un piano normale della curva proposta. Ma noi diciamo che questo piano normale è anche piano tangente alla superficie delle normali principali pel medesimo punto. Infatti esso contiene la normale che passa per questo punto, che è una generatrice della stessa superficie: contiene inoltre la tangente alla linea de'centri pel medesimo punto, perchè contiene sempre due centri consecutivi di circôli osculatori. Ma questa retta tangente è anche tangente alla superficie di cui parliamo. Adunque tale piano contenendo una generatrice, ed una tangente della superficie ultima sarà un piano tangente della medesima.

§. 5.

Nel §. precedente abbiamo dimostrato sinteticamente che la superficie delle normali principali tocca ciascuna delle due superficie, quella delle tangenti, e la polare lungo tutta la linea d'intersezione con caduna di esse due.

Non sarà discaro al lettore di trovare qui la dimostrazione analitica di questa duplice proprietà della superficie delle normali principali.

Risulta dal § precedente che le equazioni di questa superficie sono

$$(9)\quad (x-ft)f'+(y-\varphi t)\varphi' t+z-t=0,\quad X(x-ft)+Y(y-\varphi t)+Z(z-t)=0$$

ove X, Y, Z hanno i valori già più volte citati.

L'equazione unica in x, y, z, coordinate correnti della superficie si otterrà eliminando t fra queste due equazioni. Perciò ciascuna di queste, per esempio la prima, potrà intendersi come l'equazione stessa in x, y, z della superficie, purchè ivi si intenda posto per t il suo valore in x, y, z dedotto dalla seconda equazione. Riguardando z come funzione di x, e y, facciamo

$$\frac{dz}{dx}=p,\quad \text{e}\quad \frac{dz}{dy}=q.$$

Per avere p e q dovremo differenziare successivamente le equazioni (9) prima rispetto a x, considerando y come costante, poscia rispetto a y, considerando x come costante, e facendo in ambidue i casi variare non solo z ma anche t, considerati come funzioni di x, e y.

*

Pertanto differenziando rispetto a x, ed osservando che si ha per identità:

$$Xf't + Y\varphi't + Z = 0:$$

troveremo :

$$(10)\quad \begin{cases} X + Zp + \dfrac{dt}{dx}\left[(x - ft)\dfrac{dX}{dt} + (y - \varphi t)\dfrac{dY}{dt} + (z - t)\dfrac{dZ}{dt}\right] = 0 \\ f't + p + \dfrac{dt}{dx}\left[(x - ft)f''t + (y - \varphi t)\varphi''t - (f't)^2 - (\varphi't)^2 - 1\right] = 0. \end{cases}$$

Troveremo in modo analogo differenziando le equazioni (9) rispetto a y, e riguardando x come costante

$$(11)\quad \begin{cases} Y + Zq + \dfrac{dt}{dx}\left[(x - ft)\dfrac{dX}{dt} + (y - \varphi t)\dfrac{dY}{dt} + (z - t)\dfrac{dZ}{dt}\right] = 0 \\ \varphi't + q + \dfrac{dt}{dx}\left[(x - ft)f''t + (y - \varphi t)\varphi''t - (f't)^2 - (\varphi t)^2 - 1\right] = 0. \end{cases}$$

Ciò posto è facile di dedurre dalle equazioni (10) e (11) le seguenti conseguenze.

Cerchiamo i valori di p, e q in tutti i punti della linea descritta sulla superficie di cui si tratta, e determinata dalle due equazioni (9) di questa superficie, unite alla terza

$$(x - ft)\frac{dX}{dt} + (y - \varphi t)\frac{dY}{dt} + (z - t)\frac{dZ}{dt} = 0.$$

È evidente in virtù delle equazioni (10) e (11) che pe'punti che si considerano si avrà

$$X + Xp = 0, \qquad Y + Zq = 0$$

d'onde

$$(12)\qquad p = -\frac{X}{Z}, \qquad q = -\frac{Y}{Z}.$$

Ma la linea formata da'punti che si considerano, e determinata dalle tre equazioni

$$(13)\quad \begin{cases} (x - ft)f't + (y - \varphi t)\varphi't + z - t = 0 \\ X(x - \varphi t) + Y(y - \varphi t) + Z(z - t) = 0 \\ (x - ft)\dfrac{dX}{dt} + (y - \varphi t)\dfrac{dY}{dt} + (z - t)\dfrac{dZ}{dt} = 0 \end{cases}$$

non è che la stessa curva proposta.

Infatti queste equazioni sono verificate facendo

$$z = t, \quad y = \varphi t, \quad z = ft,$$

che sono i valori delle tre coordinate d' un punto qualunque della curva proposta. D'altronde le tre equazioni (13) offrono evidentemente il sistema de'punti d'incontro tra le normali principali, e le rette tangenti alla curva proposta, il qual sistema di punti forma questa stessa ultima curva.

Adunque le equazioni (13) rappresentano la intersezione tra la superficie delle normali principali, e quella delle tangenti, e dalle equazioni (12) si deduce facilmente che in tutti i punti di questa intersezione il piano tangente alla superficie delle normali principali coincide col piano tangente alla superficie delle tangenti. Il che è la prima delle proprietà che si trattava di dimostrare.

Cerchiamo ora i valori di p e q relativi alla superficie delle normali principali, e per tutti i punti situati sulla linea descritta sulla stessa superficie, e determinata dalle due equazioni (9) unite alla terza

$$(14) \qquad (x - ft)f''t + (y - \varphi t)\varphi''t - (f't)^2 - (\varphi't)^2 - 1 = 0.$$

Per sì fatti punti i valori di p e q diventano

$$(15) \qquad p = -f't\,, \qquad q = -\varphi't.$$

Ma la linea in discorso è facile di accorgersi che non è altro che la linea de' centri de'circoli osculatori. D'altronde per le cose dette nei §§ antecedenti questa è l'intersezione della superficie polare, e della superficie delle normali principali.

Adunque ritenuto che i piani tangenti alla superficie polare sono gli stessi piani normali alla curva proposta risulta dalle formole ultime (15) che la superficie delle normali principali tocca la superficie polare in tutta l'estensione della loro mutua intersezione. Il che è la seconda proprietà che si trattava di dimostrare.

Finiremo questo §? colla seguente osservazione. Già abbiamo notato che la superficie delle normali principali è una superficie gobba. Donde segue che se pe' diversi punti d'una stessa generatrice si conducono i rispettivi piani tangenti , questi passeranno sì bene tutti per la stessa generatrice, ma saranno tutti fra loro distinti, facendo angoli diversi fra di loro. Ora dalle equazioni (12) e (15) appare che ne' due punti d'incontro della generatrice colla curva proposta, e colla linea de'centri de' circoli osculatori, i due piani tangenti sono fra loro ortogonali, perchè si confondono rispettivamente col piano osculatore, è col piano normale relativi al medesimo punto della curva. Quindi sopra una stessa generatrice l'angolo acuto di due piani tangenti varia da zero fino a 90?

§. 6.

Porremo fine a questa Nota cercando l'angolo sotto il quale si intersecano le due superficie la polare, e quella delle tangenti lungo la linea della loro intersezione.

Questa linea essendo rappresentata dalle equazioni (7) del §? 2?, nelle quali le

due variabili t, e t' devono avere valori simultanei *differenti*, è facile di convincersi che chiamando θ l'angolo de'due piani tangenti in un punto qualunque della detta intersezione si avrà:

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{X}f't' + \mathrm{Y}\varphi't' + \mathrm{Z}}{\sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{X}^2 + \mathrm{Z}^2}\sqrt{1 + (f't')^2 + (\varphi't')^2}}$$

ove X, Y, Z hanno i seguenti valori in t

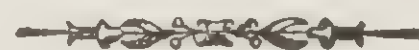
$$\mathrm{X} = -\varphi''t, \quad \mathrm{Y} = f''t, \quad \mathrm{Z} = f't\varphi''t - \varphi'tf''t.$$

Ora ben ricordando che t è differente da t', il numeratore di $\cos\theta$ cioè

$$\mathrm{X}f't' + \mathrm{Y}\varphi't' + \mathrm{Z}$$

sarà generalmente differente da zero.

Quindi le due superficie la polare, e quella delle tangenti si tagliano fra di loro ad angolo variabile da un punto all' altro della loro intersezione; ed errò l'illustre Geometra Francese affermando, come abbiamo esposto nel preambolo di questa Nota, che le due superficie in discorso si tagliano ad angolo retto.



RICERCA FONDAMENTALE PER LO STUDIO DI UNA CERTA CLASSE DI PROPRIETA' DELLE SUPERFICIE CURVE.

MEMORIA

DEL SIG. PROF. FELICE CASORATI.



§. I.

Se si considerano le superficie come flessibili ma inestendibili, a guisa direi quasi di veli, e s'immaginano le forme differenti che ognuna può assumere in siffatte condizioni, si è condotti a distinguere le proprietà in due classi. A distinguere cioè le proprietà che non subiscono alterazione per qualsiasi cambiamento di forma della superficie cui si riferiscono e che si ponno chiamare assolute, da quelle che dipendono invece dalle singole forme sotto le quali la superficie può essere concepita e che si ponno chiamare relative. Nelle ricerche concernenti soltanto le proprietà assolute, tutte le superficie che possono provenire da una medesima (e quindi anche l'una dall'altra indistintamente) mediante soli cambiamenti di forma si presentano come identiche tra loro; laonde si potrà in tali indagini considerarne una particolare qualunque, quindi anche quella tale che per certi caratteri si avesse a risguardare come il tipo della propria famiglia.

Mezzi per lo studio delle superficie indipendentemente dalle forme nelle quali, colle condizioni di flessibilità ed inestendibilità, ponno essere immaginate, sono offerti dall'uso di coordinate curvilinee, per le quali le superficie vengano considerate in se stesse e non riferite ad enti estranei (come per gli ordinarî piani coordinati) che non cambiano necessariamente con esse di posizione e di forma.

Scopo di questo breve lavoro è l'esposizione di un modo di trovare le equazioni fondamentali per lo studio delle proprietà assolute; fra le quali equazioni la principale è quella esprimente il celebre teorema di Gauss sulla misura della curvatura, ossia sul prodotto reciproco dei raggi di curvatura principali. È facile rilevare che la via tenuta da Gauss nel dimostrare il detto teorema, e quelle seguite da altri insigni Geometri che di tale questione si occuparono di poi, non mettono in tutta l'evidenza desiderabile nè ciò donde viene principalmente la importanza del medesimo, cioè di essere il più semplice possibile di siffatta categoria; ne'quali indubbiamente sieno quelli che tengangli dietro per ordine di semplicità, vale a dire (in tale argomento) d'importanza. È specialmente per questo riguardo ch'io credo possa meritare qualche attenzione il metodo che espongo, il quale, consistendo in un processo di eliminazione non soggetto ad eccezioni, conduce per necessità a trovare le equazioni in discorso l'una dopo l'altra precisamente in quell'ordine con cui si succedono nella importanza.

Per trasformazione di una superficie intendo il passaggio di essa da una ad altra forma (osservando le condizioni su indicate) per trasformate di una superficie tutte quelle che dalla medesima possono provenire per mezzo di trasformazioni; per punti corrispondenti in due superficie trasformabili l'una nell'altra, punti che mediante la trasformazione passano ad assumere il posto gli uni degli altri.

Sieno ora:

$$(x) \qquad x_1, \ x_2$$

$$((X) \qquad X_1, \ X_2$$

due coppie di coordinate curvilinee atte a determinare i punti di due superficie (σ), $(\sum)$, delle quali i quadrati degli elementi lineari vengono espressi dalle:

$$ds^2 = a_{11}\, dx_1^2 + 2a_{12}\, dx_1\, dx_2 + a_{22}\, dx_2^2 = \sum_r \sum_s a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

$$dS^2 = A_{11}\, dX_1^2 + 2A_{12}\, dX_1\, dX_2 + A_{22}\, dX_2^2 = \sum_r \sum_s A_{rs}\, dX_r\, dX_s\,,$$

dove le a_{rs} rappresentano funzioni delle coordinate (x) e le A_{rs} funzioni delle (X), ed inoltre si supponga $a_{rs} = a_{sr}$, $A_{rs} = A_{sr}$.

Onde le superficie (σ) e $(\sum)$ appartengano ad una medesima famiglia (voglio dire sieno trasformabili l'una nell'altra) è necessario e sufficiente che, ritenute le coordinate (x) ed (X) siccome relative a punti corrispondenti, sia:

$$ds^2 = dS^2\,,$$

cioè che esistano tali funzioni delle (X) le quali riguardate come valori delle (x), o viceversa, riesca identicamente soddisfatta la:

$$(1) \qquad a_{11}dx_1^2 + 2a_{12}dx_1dx_2 + a_{22}dx_2^2 = A_{11}dX_1^2 + 2A_{12}dX_1dX_2 + A_{22}\, dX_2^2\,.$$

Ma siffatta identità è pur quella che deve verificarsi affinchè i due sistemi di funzioni:

$$a_{11}\,,\ a_{12}\,,\ a_{22}\,; \qquad A_{11}\,,\ A_{12}\,,\ A_{22}$$

possano entrambi servire a costituire l'espressione dell'elemento lineare di una medesima superficie. Per ciò si rende manifesto che lo studio delle trasformazioni di una superficie (σ) qualunque è analiticamente la stessa cosa che lo studio delle trasformazioni delle coordinate nella superficie stessa, e che la ricerca delle equazioni fondamentali per lo studio delle sue proprietà assolute è la stessa cosa che la ricerca di quegli enti geometrici di essa, la cui essenza non tiene al sistema di coordinate (x) che si possa aver adottato (diversamente da ciò che p. e. ha luogo per l'angolo delle linee $x_1 =$ Costante, $x_2 =$ Costante), mentre sono però esprimibili mediante formole contenenti soltanto le funzioni a_{rs} e le loro derivate parziali rispetto alle (x), e non già le coordinate stesse (x) esplicitamente (ente così fatto è p. e. il prodotto reciproco dei raggi di curvatura principali). Supposto infatti che

$$f\left(a_{11}\,,\ a_{12}\,,\ a_{22}\,,\ \frac{da_{11}}{dx_1}\,,\ \frac{da_{11}}{dx_2}\,,\ \text{etc.}\right)$$

sia formola esprimente uno di tali enti nel sistema (x) di coordinate, l'ente stesso in altro qualunque sistema (X) verrà espresso dalla medesima formola, dove in luogo delle a_{rs} e loro derivate (rispetto alle (x) s'intende) compariranno le A_{rs} e derivate corrispondenti (cioè prese rispetto alle variabili (X)), e darà, quindi occasione ad una equazione:

$$(2)\quad f\left(a_{11}\,,\ a_{12}\,,\ a_{22}\,,\ \frac{da_{11}}{dx_1}\,,\ \frac{da_{11}}{dx_2}\,,\ \text{etc.}\right)=f\left(A_{11}\,,\ A_{12}\,,\ A_{22}\,,\ \frac{dA_{11}}{dX_1}\,,\ \frac{dA_{11}}{dX_2}\,,\ \text{etc.}\right),$$

la quale, non potendo essere che una conseguenza della (1), dirà che l'ente geometrico espresso dal primo o dal secondo membro rimane inalterato mentre la superficie cambia di forma.

Per brevità chiamerò d'ora innanzi *inalterabile* ogni formola ossia funzione che goda della proprietà (2).

§. II.

Scrivo la (1) sotto la forma:

$$(3)\qquad \Sigma_r\,\Sigma_s\,a_{rs}\,dx_r\,dx_s = \Sigma_h\,\Sigma_k\,A_{hk}\,dX_h\,dX_k$$

Considerando le variabili (x) come funzioni delle (X), si ha:

$$dx_r = \Sigma_h \frac{dx_r}{dX_h}\,dX_h\,,$$

mediante la quale espressione di dx_r, e l'analoga che se ne deduce per dx_s col combiare gl'indici r ed h nei due s e k, la (3) può presentarsi come segue:

$$\Sigma_k\,\Sigma_h\,\Sigma_r\,\Sigma_s\,a_{rs}\,\frac{dx_r}{dX_h}\,\frac{dx_s}{dX_k}\,dX_h\,dX_k = \Sigma_h\,\Sigma_k\,A_{hk}\,dX_h\,dX_k\,.$$

Questa equazione per essere identica richiede che lo siano le seguenti:

$$(4)\qquad \Sigma_r\,\Sigma_s\,a_{rs}\,\frac{dx_r}{dX_h}\,\frac{dx_s}{dX_k} = A_{hk}\,,$$

dove s'hanno a porre, s'intende, per h, k tutte le coppie di valori di cui questi indici sono suscettibili. Le equazioni (4) equivalgono evidentemente alle:

$$(4)'\qquad a_{rs} = \Sigma_h\,\Sigma_k\,A_{hk}\,\frac{dX_h}{dx_r}\,\frac{dX_k}{dx_s}\,,$$

che si deducono dalla (3) col risguardare le (X) come funzioni delle (x). Si passa d'altronde direttamente dall'uno all'altro di questi due sistemi d'equazioni col mezzo

delle identità

$$(5) \qquad \Sigma_h \frac{dx_r}{dX_h}\frac{dX_h}{dx_s} = \begin{matrix} 0 \text{ se } r \gtrless s \\ 1 \text{ se } r=s \end{matrix} \qquad \Sigma_r \frac{dX_h}{dx_r}\frac{dx_r}{dX_k} = \begin{matrix} 0 \text{ se } h \gtrless k \\ 1 \text{ se } h=k \end{matrix}$$

Chiamo per brevità:

$$a\,,\ A\,,\ \delta\,,\ \Delta$$

i determinanti formati ordinatamente coi quattro sistemi di elementi rispettivamente rappresentati da:

$$a_{rs}\,,\ A_{rs}\,,\ \frac{dx_r}{dX_s}\,,\ \frac{dX_r}{dx_s}\,;$$

per le regole di moltiplicazione dei determinanti le equazioni (4) danno:

$$(6) \qquad a.\,\delta^2 = A$$

e le (5):

$$\delta.\,\Delta = 1$$

Le considerazioni fatte in questo paragrafo manifestamente varrebbero quand'anche gl'indici ai quali i segni sommatorj Σ si riferiscono dovessero assumere un numero qualunque di valori, come sarebbero: $1, 2, \ldots, n$. Sebbene tale generalità potrebbe essere conservata, per la brevità è nondimeno preferibile di non considerare d'ora innanzi che il caso di $n = 2$. Facendo l'attenzione esclusivamente sulle equazioni (4), esse nel presente caso riduconsi alle tre seguenti:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & a_{11}\left(\frac{dx_1}{dX_1}\right)^2 + 2a_{12}\frac{dx_1}{dX_1}\frac{dx_2}{dX_1} + a_{22}\left(\frac{dx_2}{dX_1}\right)^2 = A_{11} \\ & a_{11}\frac{dx_1}{dX_1}\frac{dx_1}{dX_2} + a_{12}\left(\frac{dx_1}{dX_1}\frac{dx_2}{dX_2} + \frac{dx_1}{dX_2}\frac{dx_2}{dX_1}\right) + a_{22}\frac{dx_2}{dX_1}\frac{dx_2}{dX_2} = A_{12} \\ & a_{11}\left(\frac{dx_1}{dX_2}\right)^2 + 2a_{12}\frac{dx_1}{dX_2}\frac{dx_2}{dX_2} + a_{22}\left(\frac{dx_2}{dX_2}\right)^2 = A_{22}\,. \end{aligned} \right.$$

Si tratta di cavare, per mezzo dell'eliminazione, da queste equazioni e dalle loro successive derivate prese rispetto alle (X) altre equazioni, nelle quali non entrino punto derivate delle (x) rispetto alle (X), sì bene soltanto le funzioni a_{rs}, A_{rs} e loro rispettive derivate; equazioni che essendo sempre riducibili alla forma (2) metteranno in evidenza altrettante funzioni inalterabili.

Una funzione inalterabile sarà detta del 1° ordine ovvero del 2°, del 3°, ec. secondochè le derivate delle funzioni a_{rs} (od A_{rs} se espressa in lettere maiuscole) dell' ordine più elevato siano del 1° ordine ovvero del 2, del 3°, ec.

Inoltre d'ora innanzi per brevità converrà scrivere:

$$(7\tfrac{1}{2})\qquad a_{rs}^{(\alpha\beta\ldots\mu)},\quad A_{rs}^{(\alpha\beta\ldots\mu)},\quad \frac{r}{\alpha\beta\ldots\mu}$$

in luogo ordinatamente di:

$$\frac{d^m a_{rs}}{dx_\alpha\, dx_\beta \ldots dx_\mu};\qquad \frac{d^m A_{rs}}{dX_\alpha\, dX_\beta \ldots dX_\mu},\qquad \frac{d^m x_r}{dX_\alpha\, dX_\beta \ldots dX_\mu},$$

dove m esprime il numero degl'indici $\alpha, \beta, \ldots \mu$. Questi indici non sono suscettibili che dei valori 1, 2. Per tal notazione le (7) ovvero (4) potranno scriversi più brevemente, come segue:

$$(8)\qquad \Sigma_r\, \Sigma_s\, a_{rs} \frac{r}{h}\, \frac{s}{k} = A_{hk}$$

S'immaginino ora formate tutte le derivate (parziali) di queste equazioni degli ordini 1°, 2°, ... m^{mo}; osservando che nel ritenere le (X) come variabili indipendenti debbonsi risguardare le a_{rs} come funzioni composte colle funzioni (x) delle variabili stesse. Si otterrà un numero di equazioni, comprese le (8), espresso da:

$$3[1 + 2 + 3 + \ldots + (m+1)] = 3\,\frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

le quali conterranno le derivate parziali delle (x) degli ordini 1°, 2°, ... $(m+1)^{esimo}$, che sono in numero:

$$2[2 + 3 + 4 + \ldots + (m+2)] = (m+1)(m+4).$$

Se le equazioni (8) e le loro derivate non avessero una forma particolare, si avrebbe certezza che l'eliminazione di tutte quante le derivate delle (x) fra le medesime, e quindi la comparsa di equazioni risultanti della forma (2), non potrebbe aver luogo che a cominciare dal valore di m pel quale riuscisse:

$$3\,\frac{(m+1)(m+2)}{2} > (m+1)(m+4) \quad \text{ovvero} \quad \tfrac{1}{2}(m+1)(m-2) > 0,$$

vale a dire del valore $m = 3$. Ma le anzidette equazioni essendo di forma particolare, debbonsi pur sottoporre ad un particolare esame. Donde infatti risulterà che l'eliminazione è già possibile per $m = 2$, in virtù della relazione (6), la quale ora può scriversi così:

$$(9)\qquad \delta^2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} \end{vmatrix}^2 = \left(\frac{1}{2}\,\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{2}{1}\right)^2 = \frac{A}{a} = \frac{A_{11}\, A_{22} - A_{12}^2}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2}.$$

Portiamo dunque l'attenzione sulla forma particolare delle equazioni fra le quali l'eliminazione va eseguita, e consideriamo a dirittura la forma delle derivate più elevate, cioè dell' m^{mo} ordine. Per averne una di quest'ordine che possa rappresentarle

*

tutte, formiamo la derivata $m.^{ma}$ della (8) rispetto alle $X_\alpha, X_\beta, \ldots, X_\mu$. Non mettendo in evidenza che i termini contenenti le derivate delle (x) dell'ordine più elevato, cioè dell' $(m+1)^{mo}$ (i quali provengono dal derivare nell'espressione $a_{rs}\frac{r}{h}\frac{s}{k}$ prima $\frac{s}{k}$ m volte, ritenendo costanti a_{rs} ed $\frac{r}{h}$, poscia $\frac{r}{h}$ m volte), ed indicando con:

$$U_{hk}^{\alpha\beta\ldots\mu}$$

il complesso dei termini rimanenti, supposti trasportati tutti quanti nel secondo membro, l'equazione derivata suddetta si può scrivere nel seguente modo:

$$\Sigma_r\,\Sigma_s\,a_{rs}\left(\frac{r}{h}\,\frac{s}{k\,\alpha\beta\ldots\mu}+\frac{s}{k}\,\frac{r}{h\,\alpha\beta\ldots\mu}\right)=U_{hk}^{\alpha\beta\ldots\mu}.$$

Il secondo membro contiene il termine:

$$A_{hk}^{(\alpha\beta\ldots\mu)}$$

proveniente dalla derivazione di A_{hk}; in oltre le funzioni a_{rs} e loro derivate (rispetto alle x_1, x_2) prime, seconde, ... $m.^{esime}$; infine le derivate prime, seconde, ... $m.^{esime}$ delle (x) prese rispetto alle (X). Questa equazione, ponendo momentaneamente per brevità:

$$(10)\qquad \Sigma_r\,a_{rs}\frac{r}{h}=\mathbf{s}_h$$

equivale alla:

$$\Sigma_s\,\mathbf{s}_h\,\frac{s}{k\,\alpha\beta\ldots\mu}+\Sigma_r\,\mathbf{r}_k\,\frac{r}{h\,\alpha\beta\ldots\mu}=U_{hk}^{\alpha\beta\ldots\mu},$$

dalle quali si hanno tutte le derivate m^{esime} delle equazioni (7) attribuendo ad h, k; $\alpha, \beta, \ldots \mu$ i valori espressi da:

h, k	$\alpha\ \beta \ldots\ldots \lambda\ \mu$
	1 1 . . . . . 1 1
1, 1; 1, 2; 2, 2.	1 1 . . . . . 1 2
	1 1 . . . . . 2 2
	. . . .
	. . . .
	2 2 . . . . . 2 2

Queste equazioni derivate sono scritte qui sotto e distinte in tre classi corrispondenti alle tre coppie di valori degl'indici h, k.

$$
(11)\quad \begin{array}{l|l|l}
2\left\{1_1 \frac{1}{111..11} + 2_1 \frac{2}{111..11}\right\} = U_{11}^{11..11} & 1_1 \frac{1}{211..11} + 2_1 \frac{2}{211..11} + 1_2 \frac{1}{111..11} + 2_2 \frac{2}{111..11} = U_{12}^{11..11} & 2\left\{1_2 \frac{1}{211..11} + 2_2 \frac{2}{211..11}\right\} = U_{22}^{11..11} \\
2\left\{1_1 \frac{1}{111..12} + 2_1 \frac{2}{111..12}\right\} = U_{11}^{11..12} & 1_1 \frac{1}{211..12} + 2_1 \frac{2}{211..12} + 1_2 \frac{1}{111..12} + 2_2 \frac{2}{111..12} = U_{12}^{11..12} & 2\left\{1_2 \frac{1}{211..12} + 2_2 \frac{2}{211..12}\right\} = U_{22}^{11..12} \\
2\left\{1_1 \frac{2}{111..22} + 2_1 \frac{2}{111..22}\right\} = U_{11}^{11..22} & 1_1 \frac{1}{211..22} + 2_1 \frac{2}{211..22} + 1_2 \frac{1}{111..22} + 2_2 \frac{2}{111..22} = U_{12}^{11..22} & 2\left\{1_2 \frac{1}{211..22} + 2_2 \frac{2}{211..22}\right\} = U_{22}^{11..22} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
2\left\{1_1 \frac{1}{122..22} + 2_1 \frac{2}{122..22}\right\} = U_{11}^{22..22} & 1_1 \frac{1}{222..22} + 2_1 \frac{2}{222..22} + 1_2 \frac{1}{122..22} + 2_2 \frac{2}{122..22} = U_{12}^{22..22} & 2\left\{1_2 \frac{1}{222..22} + 2_2 \frac{2}{222..22}\right\} = U_{22}^{22..22}
\end{array}
$$

Le tre classi di equazioni verranno ordinatamente designate coi simboli $(11)_{11}$, $(11)_{12}$, $(11)_{22}$.

Onde poter eliminare fra queste equazioni e quelle degli ordini inferiori, comprese le (7), tutte le derivate delle (x), è primamente necessario di poter eliminare le derivate delle (x) dell' $(m+1)^{esimo}$ ordine fra le sole equazioni (11). E siccome queste equazioni sono in numero $3(m+1)$, mentre quelle derivate sono in numero $2(m+2)$, l'eliminazione parziale di queste ultime (secondo la regola generale, che circa questo punto si vedrà fra breve non soffrire eccezione) diverrà possibile soltanto quando sia :

$$(12) \qquad 3(m+1) - 2(m+2) = m - 1 > 0,$$

nel qual caso fornirà $m-1$ risultanti parziali, donde resteranno da eliminare le derivate m^{esima}, $(m-1)^{esima}$,... seconde e prime delle (x). Ecco ora come si conchiuda che, $m-1$ non essendo negativo, le equazioni risultanti parziali siano precisamente $m-1$, e come si ottengano. Osservando le equazioni (11) si rileva subito: 1° che combinando le equazioni :

2^a, 3^a, ... , m^{esima}, $(m+1)^{esima}$ della classe $(11)_{11}$

ordinatamente colle :

1^a, 2^a, ... , $(m-1)^{esima}$, m^{esima} della classe $(11)_{22}$

si hanno m coppie di equazioni, dalle quali cavansi ordinatamente i valori delle m coppie di derivate :

$$\frac{t}{111...12},\ \frac{t}{111...32},\ ....,$$

$$\frac{t}{112...22},\ \frac{t}{122...22} \qquad (t = 1, 2\ ;$$

vale a dire la 2ª delle $(11)_{11}$ e la 1ª delle $(11)_{22}$ danno i valori delle derivate

$$\frac{1}{111..12} \text{ e } \frac{2}{111..12}\ ;$$

e così per le altre coppie.

2° che essendo già trovati i valori delle due coppie:

$$\frac{t}{211..11}, \quad \frac{t}{122..22},$$

la 1ª delle $(11)_{11}$ e la 1ª delle $(11)_{12}$ danno i valori delle: $\dfrac{t}{111..11}$

la $(m+1)^{esima}$ delle $(11)_{22}$ e la $(m+1)^{esima}$ delle $(11)_{22}$ danno i valori delle: $\dfrac{t}{222...22}$

3° che la determinazione di tutte queste coppie di derivate non può andar soggetta ad eccezioni; poichè il determinante dei coefficienti delle derivate stesse (che qui risguardansi come le incognite) è il medesimo per tutte le coppie di equazioni indicate e precisamente il seguente:

$$\begin{vmatrix} 1_1 & 2_1 \\ 1_2 & 2_2 \end{vmatrix}$$

il quale in forza delle (10) e (9) non è altro che:

$$\begin{vmatrix} 1_1 & 2_1 \\ 1_2 & 2_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} \end{vmatrix} = \pm\sqrt{\mathrm{A}a}$$

e non può mai perciò esser nullo; noto essendo che per niuna superficie può essere A (ovvero a) eguale a zero.

4° che fatte le combinazioni accennate, delle equazioni (11) non rimangono che le $m-1$ seguenti:

$$(13) \qquad 2^a, \ 3^a, \ \ldots, \ m^{esima} \text{ della classe } (11)_{12},$$

ognuna delle quali fornirà una risultante parziale col sostituire alle derivate $(m+1)^{esime}$ delle (x) i valori determinati come si è detto. Questa sostituzione però non occorre in effetto per giungere alle risultanti; perocchè se si riflette che i primi membri delle equazioni:

$$3^a, \ 4^a, \ \ldots, \ (m+1)^{esima} \text{ della classe } (11)_{11}$$

sommati ordinatamente coi primi delle:

$$1^a, \ 2^a, \ \ldots, \ (m-1)^{esima} \text{ della classe } (11)_{22}$$

danno ordinatamente i doppî dei primi membri delle (13), e che le stesse relazioni debbono quindi aver luogo fra i secondi membri; si conchiude subito che le risultanti parziali sono le seguenti:

$$(14) \qquad \begin{array}{lcl} \mathrm{U}_{11}^{11\cdots22} - 2\mathrm{U}_{12}^{11\cdots12} + \mathrm{U}_{22}^{11\cdots11} = 0 & & \Sigma_p\Sigma_q(-1)^{p+q}\,\mathrm{U}_{pq}^{11\cdots\bar{p}\bar{q}} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \text{ossia} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{U}_{11}^{22\cdots22} - 2\mathrm{U}_{12}^{12\cdots22} + \mathrm{U}_{22}^{11\cdots22} = 0 & & \Sigma_p\Sigma_q(-1)^{p+q}\,\mathrm{U}_{pq}^{22\cdots\bar{p}\bar{q}} = 0, \end{array}$$

dove con $\bar{p}$ (lo stesso dicasi per l'altre lettere) s'intende quello dei due indici 1, 2 che è diverso da p. Nelle combinazioni delle equazioni (14) colle derivate $(m-1)^{esime}$, $(m-2)^{esime}$, etc. delle (7), le derivate

$$\mathrm{A}_{hk}^{(\alpha\beta\ldots\mu)}$$

debbono evidentemente comparire aggruppate come lo sono i simboli

$$\mathrm{U}_{hk}^{\alpha\beta\ldots\mu}$$

in quelle equazioni.

§. III.

Premesse queste considerazioni generali, esaminiamo successivamente le equazioni (7), le loro derivate prime, le seconde, ec.

Quanto alle (7) si vede immediatamente la impossibilità di eliminare le quattro derivate $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{2}{2}$; laonde non havvi funzione inalterabile dell'ordine zero.

Quanto alle derivate prime delle (7) si ha $m=1$ ossia $m-1=0$; quindi (12) non esistono funzioni inalterabili del primo ordine.

Quanto alle nove derivate seconde delle (7) si ha $m=2$ ossia $m-1=1$ e quindi una risultante parziale (14) che è:

$$(15) \qquad \Sigma_p \Sigma_q \, (-1)^{p+q} \, \mathrm{U}_{pq}^{\bar{p}\,\bar{q}} = 0.$$

Con questa equazione colle (7) e le loro sei derivate prime si hanno dieci equazioni contenenti dieci derivate delle (x), cioè le quattro prime e le sei seconde. Si tratta di decidere se sia possibile o no combinare queste equazioni in modo da averne qualche altra libera da derivate delle (x). La via più naturale per risolvere tal questione è di liberare la (15) anzitutto dalle derivate seconde delle (x) col mezzo delle derivate prime delle (7), e poscia di osservare se la equazione così ottenuta possa o no essere liberata anche dalle derivate prime delle (x) col soccorso delle (7), delle quali una conseguenza si è veduto essere la (9). Seguiamo questa via.

Formando effettivamente la derivata prima delle (8) rispetto ad X_α, e poi la derivata seconda rispetto ad X_α ed X_β (donde si avranno tutte le derivate prime e seconde coll'attribuire agl'indici $h, k; \alpha, \beta$ tutti i sistemi di valori permessi), si ottengono le equazioni (16) e (17):

$$(8) \qquad \Sigma_r \Sigma_s \, a_{rs} \frac{r}{h}\frac{s}{k} = \mathrm{A}_{hk}$$

$$(16) \qquad \Sigma_r \Sigma_s \left\{ a_{rs}\left(\frac{r}{h}\frac{s}{k\alpha} + \frac{s}{k}\frac{r}{h\alpha}\right) + \frac{r}{h}\frac{s}{k}\,\Sigma_p \, a_{rs}^{(p)} \frac{p}{\alpha} \right\} = \mathrm{A}_{hk}^{(\alpha)}$$

$$(17)\qquad \Sigma_r\Sigma_s\Big\{a_{rs}\left(\frac{r}{h}\,\frac{s}{k\alpha\beta}+\frac{s}{k}\,\frac{r}{h\alpha\beta}\right)+a_{rs}\left(\frac{r}{h\beta}\,\frac{s}{k\alpha}+\frac{s}{k\beta}\,\frac{s}{h\alpha}\right)+\left(\frac{r}{h}\,\frac{s}{k\alpha}+\frac{s}{k}\,\frac{r}{h\alpha}\right)\Sigma_p\,a_{rs}^{(p)}\frac{p}{\beta}$$
$$+\left(\frac{r}{h}\,\frac{s}{k\beta}+\frac{s}{k}\,\frac{r}{h\beta}\right)\Sigma_p\,a_{rs}^{(p)}\frac{p}{\alpha}+\frac{r}{h}\frac{s}{k}\Sigma_p\,a_{rs}^{(p)}\frac{p}{\alpha\beta}+\frac{r}{h}\frac{s}{k}\,\Sigma_p\,\Sigma_q a_{rs}^{(pq)}\frac{p}{\alpha}\,\frac{q}{\beta}\Big\}=A_{hk}^{(\alpha\beta)}.$$

Prima di proceder oltre è bene introdurre qualche notazione, onde esprimere più brevemente i valori delle derivate seconde delle (x), da cavarsi dalle (16), non che le operazioni che si avranno ad eseguire dopo sostituiti i valori stessi nella (15). Rappresenti $y(\eta)$ una espressione nella quale entri in qualsivoglia modo l' indice η (come sarebbero p. e. $a_{\eta 1}$, $a_{\eta 2}$, $a_{\eta m}$, $\frac{m}{\eta}$ vale a dire la derivata di x_m rispetto ad X_η), e si ponga:

$$(18)\quad\left\{\begin{aligned} &a_{r1}^{(s)}\,y(2)-a_{r2}^{(s)}\,y(1)+\left(a_{1s}^{(2)}-a_{2s}^{(1)}\right)y(r)=[y(\eta)]_{rs},\\ &A_{r1}^{(s)}\,y(2)-A_{r2}^{(s)}\,y(1)+\left(A_{1s}^{(2)}-A_{2s}^{(1)}\right)y(r)=\Big[y(\eta)\Big]_{rs};\end{aligned}\right.$$

sì che p. e.:

$$a_{r1}^{(s)}\,a_{2m}-a_{r2}^{(s)}\,a_{1m}+\left(a_{1s}^{(2)}-a_{2s}^{(1)}\right)a_{rm}=[a_{\eta m}]_{rs},$$

$$A_{r1}^{(s)}\frac{m}{2}-A_{r2}^{(s)}\frac{m}{1}+\left(A_{1s}^{(2)}-A_{2s}^{(1)}\right)\frac{m}{r}=\left[\frac{m}{\eta}\right]_{rs}.$$

Questa notazione dà luogo a proprietà, che in parte convien rimarcare. Si vede in primo luogo che, 1 e 2 essendo i soli valori positivi degli indici, si ha:

$$(19)\qquad [y(\eta)_{rs}=[y(\eta)]_{sr}.$$

Si vede pure immediatamente che, rappresentando C una quantità che non varia con η, e $z(\eta)$ una espressione ove entri in qualsivoglia modo l'indice η, hanno luogo le:

$$(20)\qquad C[y(\eta)]_{rs}=[Cy(\eta)]_{rs},\qquad [y(\eta)]_{rs}+[z(\eta)]_{rs}=[y(\eta)+z(\eta)]_{rs}.$$

Ponendo inoltre:

$$(21)\qquad b_{rs}=b_{sr}=\Sigma_m\Sigma_n\,(-1)^{m+n}\left(2a_{rs}^{(m)}\,a_{\bar m\bar n}^{(n)}-a_{nr}^{(m)}\,a_{\bar n s}^{(\bar m)}\right)$$

vale a dire:

$$b_{11}=2\left(a_{11}^{(1)}a_{22}^{(1)}-2a_{11}^{(1)}a_{21}^{(2)}+a_{11}^{(2)}a_{11}^{(2)}\right)\Big|\,b_{12}=b_{21}=2\left(a_{12}^{(1)}a_{22}^{(1)}-2a_{12}^{(1)}a_{21}^{(2)}+a_{12}^{(2)}a_{11}^{(2)}\right)$$
$$-\left(a_{11}^{1}a_{22}^{(2)}-a_{11}^{(2)}a_{22}^{(1)}\right)\Big|\,b_{22}=2\left(a_{22}^{(2)}a_{11}^{(2)}-2a_{22}^{(2)}a_{12}^{(1)}+a_{22}^{(1)}a_{22}^{(1)}\right)$$

si vede eziandio che:

$$\Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k+1} [y(\eta)]_{hk} [z(\eta)]_{\bar{h}\,\bar{k}} = \Sigma_p \Sigma_q (-1)^{p+q} b_{\bar{p}\,\bar{q}}\, y(p)\, z(q).$$

È superfluo l'avvertire che le stesse formole valgono anche per le lettere maiuscole. Si notino due casi particolari dell'ultima trovata; cioè quelli che si hanno facendo in primo luogo $y(\eta) = a_{\eta m}$ e $z(\eta) = a_{\eta n}$, ed in secondo luogo $y(\eta) = \frac{m}{\eta}$ e $z(\eta) = \frac{n}{\eta}$ nella formola relativa alle lettere maiuscole. Essi sono indicati dalle:

$$(22) \qquad \Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k+1} [a_{\eta m}]_{hk} [a_{\eta n}]_{\bar{k}\,\bar{h}} = \Sigma_p \Sigma_q (-1)^{p+q}\, b_{\bar{p}\,\bar{q}}\, a_{pm}\, a_{qn}\,.$$

$$(23) \qquad \Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k-1} \left[\frac{m}{\eta}\right]_{hk} \left[\frac{n}{\eta}\right]_{\bar{h}\,\bar{k}} = \Sigma_p \Sigma_q (-1)^{p+q} \mathrm{B}_{\bar{p}\,\bar{q}} \frac{m}{p} \frac{n}{q}\,.$$

Notinsi anche le formole seguenti. Dalla:

$$a_{uv}\, a_{\bar{u}\,\bar{v}} - a_{u\,\bar{v}}\, a_{\bar{u}\,v} = (-1)^{u+v} a$$

si deduce:

$$(24) \qquad \Sigma_r \Sigma_s (-1)^{r+s} a_{rs}\, a_{p\,\bar{r}}\, a_{q\,\bar{s}} = a.\, a_{pq}$$

d'onde emerge subito che le derivate: $a^{(n)}_{\omega m}$, $a^{(m)}_{\omega n}$, $a^{(\omega)}_{mn}$ nel primo e nel secondo membro della eguaglianza che segue hanno gli stessi coefficienti, vale a dire che la eguaglianza stessa sussiste.

$$(25) \qquad \Sigma_s (-1)^{\bar{s}} a_{\omega s} [a_{\eta \bar{s}}]_{mn} = a\left(a^{(n)}_{\omega m} + a^{(m)}_{\omega n} - a^{(\omega)}_{mn} \right).$$

Moltiplicando questa eguaglianza per $[a_{\eta\bar{\omega}}]_{\bar{m}\,\bar{n}}$ e facendo su quella che ne risulta l'operazione $\Sigma_\omega \Sigma_m \Sigma_n (-1)^{\omega+m+n}$, il primo membro (disponendo opportunamente i segni sommatorî, non che le quantità affette dagl'indici) darà per risultato:

$$\Sigma_s \Sigma_\omega (-1)^{s+\omega} a_{s\omega} \Sigma_m \Sigma_n (-1)^{m+n+1} [a_{\eta\,\bar{s}}]_{mn} [a_{\eta\,\bar{\omega}}]_{\bar{m}\,\bar{n}},$$

la quale espressione, in virtù della (22) (ove in luogo degl'indici h, k, m, n debbonsi immaginare quelli convenienti al caso, vale a dire ordinatamente i seguenti: m, n, $\bar{s}$, $\bar{\omega}$; e quest'osservazione valga anche per il seguito), può trasformarsi nella:

$$\Sigma_p \Sigma_q (-1)^{p+q} b_{\bar{p}\,\bar{q}} \Sigma_s \Sigma_\omega (-1)^{s+\omega} a_{s\omega}\, a_{p\,\bar{s}}\, a_{q\,\bar{\omega}}$$

a cui può applicarsi la semplificazione (24). Dunque riassumendo si avrà:

$$(26)\qquad \Sigma_p\Sigma_q(-1)^{p+q}\, a_{pq}\, b_{\bar p\,\bar q} = \Sigma_\omega\Sigma_m\Sigma_n(-1)^{\omega+m+n}\left(a^{(n)}_{\omega m}+a^{(m)}_{\omega n}-a^{(\omega)}_{mn}\right)[a_{\eta\bar\omega}]_{\bar m\,\bar n}\,.$$

Per esprimere che il determinante $\frac{r}{1}\frac{s}{2}-\frac{r}{2}\frac{s}{1}$ è eguale a: $+\delta$, e , $-\delta$ secondochè sia: $s >$, $=$, $< r$ (il che è conseguenza del significato della lettera δ), pongasi:

$$(27)\qquad \frac{r}{1}\frac{s}{2}-\frac{r}{2}\frac{s}{1}=(s-r)\delta.$$

Di qui si deduce subito:

$$(28)\qquad \Sigma_h\Sigma_k(-1)^{h+k}\frac{r}{h}\frac{s}{k}\frac{p}{\bar h}\frac{q}{\bar k}=(p-r)(q-s)\delta^2\,.$$

Siccome dopo aver formata la (15) bisognerà sostituire alle derivate seconde delle (x) i loro valori forniti dalle (16) s'intende dalle sei equazioni provenienti dalla (16) coll'attribuire agl'indici h, k, α i valori 1, 2); perciò determiniamo cotesti valori. Combinando a due a due le sei equazioni (16) , come fu indicato in generale nel §. II., e ponendo per un momento:

$$A^{(\alpha)}_{hk}-\Sigma_r\Sigma_s\frac{r}{h}\frac{s}{k}\Sigma_p\, a^{(p)}_{rs}\frac{p}{\alpha}=\dot{j}^{\alpha}_{rs}$$

si trova:

$$\frac{\omega}{mn}=\frac{(-1)^{\bar\omega}}{2a\delta}\Sigma_\varepsilon\, a_{\varepsilon\bar\omega}\left\{\dot{j}^{n}_{m1}\frac{\varepsilon}{2}-\dot{j}^{n}_{m2}\frac{\varepsilon}{1}+\left(\dot{j}^{2}_{1n}-\dot{j}^{1}_{2n}\right)\frac{\varepsilon}{m}\right\};$$

ma la espressione fra parentesi $\{....\}$ ha forma simile alle (18); quindi sostituendo ai simboli $\dot{j}^{\alpha}_{rs}$ i loro valori , è facile col soccorso della (27) e delle proprietà delle espressioni (18) di ridurre il valore trovato per la derivata seconda di x_ω rispetto ad X_m ed X_n alla forma seguente:

$$(29)\qquad \frac{\omega}{mn}=\frac{(-1)^{\bar\omega}}{2a\delta}\left\{\Sigma_\varepsilon\, a_{\varepsilon\bar\omega}\left[\frac{\varepsilon}{\eta}\right]_{mn}-\delta\,\Sigma_\mu\Sigma_\nu[a_{\eta\bar\omega}]_{\mu\nu}\frac{\mu}{m}\frac{\nu}{n}\right\}.$$

Ciò premesso osserviamo che la combinazione a farsi delle equazioni rappresentate in generale dalla (17), onde avere la risultante parziale (15), equivale al porre nella (17) $\bar h$ e $\bar k$ in luogo di α e β ed eseguire poi su di essa la operazione

$$\Sigma_h\,\Sigma_k\,(-1)^{h+k}\,;$$

il che p. e. fatto sul secondo membro fornisce il risultato:

$$(30)\qquad \Sigma_h\,\Sigma_k\,(-1)^{h+k}\,A^{(\bar h\;\bar k)}_{hk}\,.$$

La detta combinazione equivale anche al moltiplicare la (17) per $(h-\alpha)(k-\beta)$ ed eseguire poscia l'operazione $\Sigma_h\Sigma_k\Sigma_\alpha\Sigma_\beta$. Poichè indicando con $f(h, k, \alpha, \beta)$ una espressione nella quale entrino in qualsivoglia maniera gl'indici h, k, α, β, ha luogo manifestamente la:

$$(31)\qquad \Sigma_h\Sigma_k\,\Sigma_\alpha\Sigma_\beta(h-\alpha)(k-\beta)f(h, k, \alpha, \beta) = \Sigma_h\Sigma_k(-1)^{h+k}f(h, k, \bar{h}, \bar{k}).$$

Per ultimo si noti che, rappresentando V_{pq} e W_{pq} espressione nelle quali gl' indici p e q entrino simmetricamente, ha pure luogo la:

$$(32)\qquad \Sigma_h\Sigma_k(-1)^{h+k}(V_{h\bar{k}}\,W_{\bar{h}k} + V_{h\bar{h}}\,W_{k\bar{k}}) = \Sigma_h\Sigma_k(-1)^{h+k+1}V_{hk}\,W_{\bar{h}\bar{k}}\,.$$

Formiamo adunque finalmente la (15) ed a tal'uopo poniamo nella (17) $\bar{h}$ e $\bar{k}$ in luogo di α e β e facciamo l'operazione $\Sigma_h\Sigma_k(-1)^{h+k}$. Per brevità convien chiamare momentaneamente:

1° P il risultato di tale operazione effettuata sulla parte del primo membro contenente soltanto derivate prime delle (x), cioè sull'ultima parte;

2° Q il risultato analogo per le parti contenenti le derivate seconde, delle (x), linearmente, cioè per le parti terza, quarta e quinta.

3° R il risultato analogo per la parte contenente le derivate seconde non linearmente, cioè per la seconda. Che il risultato poi dell'operazione stessa eseguita sulla parte contenente le derivate terze delle (x), cioè sulla prima, sia nullo, può desumersi, tosto anche dall'osservare la forma di questa parte, indipendente dalle precedenti considerazioni.

Avendo già notato che la medesima operazione effettuata sul secondo membro conduce al risultato (30), si vede la (15) non esser altro che:

$$(33)\qquad R + Q + P = \Sigma_h\Sigma_k(-1)^{h+k}\,A_{hk}^{(\bar{h}\,\bar{k})}\,.$$

Consideriamo ora separatamente le espressioni di P, Q, R, nelle due ultime delle quali sostituiremo alle derivate seconde delle (x) i valori dati dalla (29).

1° Riguardo a P si vede subito che, in virtù della (28), e poscia della (31) (dove in luogo della f qui s'immagina la espressione $a_{rs}^{(pq)}$), si trasforma come segue:

$$(34)\left\{\begin{aligned} P &= \Sigma_h\Sigma_k(-1)^{h+k}\,\Sigma_r\Sigma_s\frac{r}{s}\frac{s}{k}\,\Sigma_p\Sigma_q a_{rs}^{(pq)}\frac{p}{\bar{h}}\frac{q}{\bar{k}} = \Sigma_r\Sigma_s\Sigma_p\Sigma_q\,a_{rs}^{(pq)}\,\Sigma_h\Sigma_k(-1)^{h+k}\frac{r}{h}\frac{s}{k}\frac{p}{\bar{h}}\frac{q}{\bar{k}} \\ &= \delta^2\,\Sigma_r\Sigma_s\Sigma_p\Sigma_q\,a_{rs}^{(pq)}(r-p)(s-q) = \delta^2\Sigma_r\Sigma_s(-1)^{r+s}\,a_{rs}^{(\bar{r}\,\bar{s})}\,; \end{aligned}\right.$$

d'onde per la (9) è manifesto che P è libera da ogni derivata delle (x).

2° Riguardo a Q, immaginiamo separati sotto il segno d'operazione $\Sigma_r\Sigma_s$ i termini in tre gruppi, il primo dei quali contenga le derivate seconde di x_r, il secondo

*

le derivate seconde di x_s, ed il terzo perciò sia quello in cui figura la derivata seconda di x_p; ed in ognuno di questi gruppi sostituiamo ordinatamente agl' indici r, s, p gl'indici m, n, ω, come trovasi indicati nella tabella :

1°	s	p	r
2°	p	r	s
3°	r	s	p
	m	n	ω

riferendo ben'inteso i segni sommatorî ai nuovi indici. Se in oltre applichiamo alle espressioni provenienti dal primo e dal secondo gruppo la riduzione (32), ed osserviamo che f avendo il significato (31) ha luogo identicamente la:

$$\Sigma_h \Sigma_k f(h, k, \bar{h}, \bar{k}) = \Sigma_h \Sigma_k f(\bar{h}, \bar{k}, h, k) ;$$

possiamo ridurre Q alla forma :

$$Q = \Sigma_\omega \Sigma_m \Sigma_n \left(- a_{\omega m}^{(n)} - a_{\omega n}^{(m)} + a_{mn}^{(\omega)} \right) \Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k} \frac{m}{\bar{h}} \frac{n}{\bar{k}} \frac{\omega}{hk} .$$

Sostituiamo ora in luogo di $\frac{\omega}{hk}$ il valore desunto dalla (29), e chiamiamo per brevità Q_A il risultato della sostituzione della prima parte, cioè di :

$$\frac{(-1)^{\bar{\omega}}}{2a\delta} \Sigma_\varepsilon a_{\varepsilon \bar{\omega}} \left[\frac{\varepsilon}{\eta} \right]_{hk}$$

e Q_a il risultato della sostituzione della seconda. Saranno :

$$(35) \qquad Q = Q_A + Q_a$$

$$Q_A = \frac{1}{2a\delta} \Sigma_\omega \Sigma_m \Sigma_n (-1)^{\bar{\omega}} \left(- a_{\omega m}^{(n)} - a_{\omega n}^{(m)} + a_{mn}^{(\omega)} \right) \Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k} \frac{m}{\bar{h}} \frac{n}{\bar{k}} \Sigma_\varepsilon a_{\varepsilon \bar{\omega}} \left[\frac{\varepsilon}{\eta} \right]_{hk}$$

$$Q_a = \frac{1}{2a} \Sigma_\omega \Sigma_m \Sigma_n \Sigma_\mu \Sigma_\nu (-1)^{\bar{\omega}} \left(- a_{\omega m}^{(n)} - a_{\omega n}^{(m)} + a_{mn}^{(\omega)} \right) [a_{\eta \bar{\omega}}]_{\mu\nu} \Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k} \frac{m}{\bar{h}} \frac{n}{\bar{k}} \frac{\mu}{h} \frac{\nu}{k}$$

Q_A non potrebbe essere liberata mediante la (9) dalle derivate prime delle (x), perchè è di grado dispari rispetto alle medesime; potrebbe però essere distrutta da qualche altra parte della (33) che fosse pure di grado dispari. Quanto a Q_a, che è di grado pari (s'intende sempre rispetto alle derivate prime delle x_1, x_2), in forza della (28), e poscia della (31), si ottiene :

$$Q_a = \frac{\delta^2}{2a} \Sigma_\omega \Sigma_m \Sigma_n (-1)^{\omega+m+n} \left(- a_{\omega m}^{(n)} - a_{\omega n}^{(m)} + a_{mn}^{(\omega)} \right) [a_{\eta \bar{\omega}}]_{\bar{m}\bar{n}} ,$$

espressione libera da derivate delle (x), e che per mezzo della (26) si riduce alla

forma più semplice :

$$(36) \qquad Q_a = -\frac{\delta^2}{a2}\Sigma_p\Sigma_q(-1)^{p+q}\, a_{pq}\, b_{\bar{p}\,\bar{q}}\,.$$

3.° Riguardo ad R si ha :

$$R = \Sigma_r\Sigma_s\, a_{rs}\, \Sigma_h\Sigma_k\, (-1)^{h+k}\left(\frac{r}{hk}\,\frac{s}{\bar{k}\bar{h}} + \frac{s}{\bar{k}\bar{k}}\,\frac{r}{\bar{h}\bar{h}}\right)$$

ovvero per la (32) :

$$R = \Sigma_r\Sigma_s\, a_{rs}\, \Sigma_h\Sigma_k(-1)^{h+k+1}\,\frac{r}{hk}\,\frac{s}{\bar{h}\,\bar{k}}\,.$$

Sostituiamo in luogo delle derivate seconde $\frac{r}{hk}$ ed $\frac{s}{\bar{h}\,\bar{k}}$ i valori :

$$\frac{r}{h\,k} = \frac{(-1)^{\bar{r}}}{2a\delta}\left\{\Sigma_m\, a_{m\bar{r}}\left[\frac{m}{\eta}\right]_{hk} - \delta\Sigma_u\Sigma_v[a_{\eta\,\bar{r}}]_{uv}\,\frac{u}{h}\,\frac{v}{k}\right\}$$

$$\frac{s}{\bar{h}\,\bar{k}} = \frac{(-1)^{\bar{s}}}{2a\delta}\left\{\Sigma_n\, a_{n\bar{s}}\left[\frac{n}{\eta}\right]_{\bar{h}\,\bar{k}} - \delta\Sigma_y\Sigma_z\,[a_{\eta\,\bar{s}}]_{yz}\,\frac{y}{\bar{h}}\,\frac{z}{\bar{k}}\right\}$$

ed indichiamo per brevità con: R_{AA}, R_{Aa}, R_{aA}, R_{aa} ordinatamente i risultati della sostituzione : delle sole prime parti di tali valori, della prima parte del primo e della seconda del secondo, della seconda del primo e della prima del secondo, delle sole seconde parti; di modo che :

$$R = R_{AA} + R_{Aa} + R_{aA} + R_{aa}\,.$$

Ora :

$$R_{AA} = \frac{1}{4a^2\delta^2}\Sigma_r\Sigma_s(-1)^{r+s}\, a_{rs}\, \Sigma_m\Sigma_n\, a_{m\bar{r}}\, a_{n\bar{s}}\, \Sigma_h\Sigma_k\, (-1)^{h+k+1}\left[\frac{m}{\eta}\right]_{hk}\left[\frac{n}{\eta}\right]_{\bar{h}\,\bar{k}}$$

ossia, per la (23) :

$$R_{AA} = \frac{1}{4a^2\delta^2}\Sigma_p\Sigma_q(-1)^{p+q}\, B_{\bar{p}\,\bar{q}}\, \Sigma_m\Sigma_n\frac{m}{p}\,\frac{n}{q}\,\Sigma_r\Sigma_s\,(-1)^{r+s}\, a_{rs}\, a_{m\bar{r}}\, a_{n\bar{s}}$$

d'onde, mediante la riduzione (24) ed osservando la (8), si ha :

$$(37) \qquad R_{AA} = \frac{1}{4a\delta^2}\Sigma_p\,\Sigma_q\,(-1)^{p+q}\, A_{pq}\, B_{\bar{p}\,\bar{q}}\,.$$

Consideriamo R_{aa}, che essendo, come R_{AA}, di grado pari rispetto alle derivate delle (x), potrebbe esserne liberata. Questo appunto avviene applicando alla espressione di R_{aa} :

$$R_{aa} = \frac{1}{4a^2}\Sigma_r\Sigma_s(-1)^{r+s}a_{rs}\,\Sigma_u\Sigma_v\Sigma_y\Sigma_z\,[a_{\eta\bar{r}}]_{uv}\,[a_{\eta\,\bar{s}}]_{yz}\,\Sigma_h\Sigma_k(-1)^{h+k+1}\,\frac{u}{h}\,\frac{v}{k}\,\frac{y}{\bar{h}}\,\frac{z}{\bar{k}}$$

la riduzione (28). Se dopo siffatta riduzione, per semplificare si applicano anche ordinatamente le (31), (22) e (24), R_{aa} assume successivamente le forme :

$$(38)\quad \begin{cases} R_{aa} = \dfrac{\delta^2}{4a^2}\Sigma_r\Sigma_s(-1)^{r+s}\, a_{rs}\, \Sigma_u\Sigma_v(-1)^{u+v+1}\,[a_{\eta\bar{r}}]_{uv}\,[a_{\eta\bar{s}}]_{\bar{u}\,\bar{v}} \\[2ex] \quad = \dfrac{\delta^2}{4a^2}\Sigma_p\Sigma_q(-1)^{p+q}\, b_{\bar{p}\,\bar{q}}\Sigma_r\Sigma_s(-1)^{r+s}a_{rs}\, a_{p\bar{r}}a_{q\bar{s}} \\[2ex] \quad = \dfrac{\delta^2}{4a}\Sigma_p\Sigma_q(-1)^{p+q}\, a_{pq}\, b_{\bar{p}\,\bar{q}}\,. \end{cases}$$

Finalmente circa R_{Aa} ed R_{aA}, che sono di grado dispari come Q_A, è naturale di farne il paragone con questa. Si noti anzitutto che per la simmetrica loro formazione R_{Aa} ed R_{aA} sono evidentemente tra loro eguali. Volendo, si può dare ad R_{aA} completamente l'aspetto di R_{Aa} col sostituire agl'indici :

s, r, n, u, v, h, k i seguenti: $r, s, m, y, z, \bar{h}, \bar{k}$

Prendendo quindi $2R_{Aa}$ invece di $R_{Aa} + R_{aA}$ e cambiando nella sua espressione gl' indici :

m, r, y, z nei seguenti : $\varepsilon, \omega, m, n$

onde facilitarne il confronto con Q_A, si ha:

$$R_{Aa} + R_{aA} + Q_A = \frac{1}{2a^2\delta}\Sigma_\varepsilon\Sigma_h\Sigma_k(-1)^{h+k}\begin{bmatrix}\varepsilon\\ -\\ \eta\end{bmatrix}_{hk}\Sigma_\omega\Sigma_m\Sigma_n(-1)^{\bar{\omega}}a_{\varepsilon\bar{\omega}}\,\frac{m}{\bar{h}}\,\frac{n}{\bar{k}}$$
$$\left\{\Sigma_s(-1)^{\bar{s}}a_{\omega s}[a_{\eta\bar{s}}]_{mn} + a\left(-a^{(n)}_{\omega m} - a^{(m)}_{\omega n} + a^{(\omega)}_{mn}\right)\right\}$$

Basta ormai osservare la (25) per conchiudere :

$$(39)\qquad R_{Aa} + R_{aA} + Q_A = 0$$

per conchiudere cioè che le parti della (33) o (15), le quali non si ponno liberare dalle derivate prime delle (x) mediante la (9), si distruggono a vicenda. La (15) è dunque una (e la prima) delle equazioni (2); la sua forma, riassumendo i risultati (34), (35), (36), (37), (38) e (39), ponendo in oltre per δ^2 il valore $\dfrac{A}{a}$, è la seguente :

$$(40)\qquad \frac{1}{a}\Sigma_p\Sigma_q(-1)^{p+q}\left\{\frac{1}{4a}a_{pq}b_{\bar{p}\,\bar{q}} - a^{(\bar{p}\,\bar{q})}_{pq}\right\} = \frac{1}{A}\Sigma_p\Sigma_q(-1)^{p+q}\left\{\frac{1}{4A}A_{pq}B_{\bar{p}\,\bar{q}} - A^{(\bar{p}\,\bar{q})}_{pq}\right\}$$

La funzione inalterabile primo o secondo membro di questa equazione divisa per 2 è la nota formola esprimente la misura della curvatura; questa equazione cioè è

quella esprimente il celebre teorema di Gauss; del quale è messa per tal guisa in piena evidenza la proprietà di essere il più semplice possibile di simil genere; tutti gli altri o ne sono immediata conseguenza o corrispondono ad equazioni (2) di ordine superiore al secondo. La misura della curvatura verrà nel seguito indicata colla lettera φ ovvero colla maiuscola Φ, secondochè la si intenderà espressa con lettere minuscole, come il primo membro della precedente equazione, ovvero con lettere maiuscole, come il secondo membro.

(*Continua*).

PUBBLICAZIONI RECENTI

SALMON G. — On Quaternary Cubics (Transazioni della R. Società di Londra).

CHELINI D. — Determinazione analitica della rotazione dei corpi liberi secondo i concetti di Poinsot (Vol. X. delle Memorie dell'Accademia di Bologna).

HATON DE LA GOUPILLIÈRE. — Traité théorique et pratique des Engranages, in 8° *Paris* 1861.

BALTZER D^{r}. R. — Théorie et applications des determinants avec l'indication des sources originales traduit de l'allemand par J. Houel. in 8° *Paris* 1861.

JOURNAL de l'École Imp. polyt. 38me Cahier, in 4° *Paris* 1861.

MEUREY (C-V) — La vraie théorie des quantites négatives et des quantités prétendues imaginaires, in 12° *Paris* 1861.

WINCKLER Dr. ANTON. — Integrali definiti. Opuscolo in 8° di 50 pag. in lingua Tedesca estratto dagli Atti dell'Accademia di Vienna.

STURM — Cours de mecanique vol. 1er. in 8° *Paris* 1861.

Atti dell'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei anno XIV. Sessione V. del 1861. in 4° *Roma* 1861.

The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics N° 15. February 1861. *London*.

TODHUNTER J. — History of the Calculs of Variations. Vol. in 8° di pag. 532. *Cambridge* 1861.

AIRY G. — On the algebrical and numerical Theory of Errors of Observations, in 8° *Cambridge* 1861.

LETTERA
DEL P. ANGELO SECCHI D. C. D. G.
DIRETTORE DELL'OSSERVATORIO DEL COLLEGIO ROMANO
A B. BONCOMPAGNI

Coll. Rom. 16 luglio 1861

La ringrazio del foglio (*): Credo però che Hind s'inganni credendo che la terra abbia toccato la coda. La cometa fu nel nodo il giorno 28, 2 Giugno e la terra stava in *a*. (V. fig.) La terra fu nel nodo il 30, 5 circa, e la cometa era in *b*. La minima distanza sembra esser stata il 29: ma tal distanza era di quasi 2° veduti dal centro del sole: la larghezza della coda dal centro del sole non poteva superare mezzo grado anzi appena $\frac{1}{4}$ di grado, e la curvatura (a cui ricorre Hind) nel giorno 29 dovea esser

(*) Il foglio qui menzionato è il Numero di JEUDI 11 JUILLET 1861 del JOURNAL DES DÉBATS POLITIQUES ET LITTÉRAIRES. In questo Numero (pag. 2ª, colonna 4ª, lin. 8—59) si legge :

« On a souvent demandé aux savans d'expliquer ce qu'il adviendrait de la terre si dans son mouvement de » rotation elle était rencontrée par une comète. Cette éventualité, sur laquelle les imaginations se sont évertuées, » se serait produite tout récemment, si l'on en croit une intéressante communication que vient d'adresser au » *Times* M. Hind. Voici ce que dit le célèbre astronome anglais:

» Permettez-moi de porter votre attention sur une circonstance relative à la comète et que j'ai oubliée quand » je vous ai adressé ma communication datée du 3. Il paraît que non seulement il est possibile, mais encore » il est probable que, dans la journée du dimanche 30 juin, la terre a traversé la queue de la comète à une » distance des deux tiers environ de son extrémité à partir du noyau.

» La tête de la comète était dans l'écliptique à six heures après midi, le 28 juin, à une distance de 13 » millions 600, 000 milles de l'orbite de la terre, sa longitude, vue du soleil, étant à 279 degrés 1 minute. La » terre, à ce moment, était à 2 degrés 4 minutes derrière ce point, mais elle a dû y arriver peu après dix » heures dimanche dernier. La queue d'une comète est rarement un prolongement exact du rayon de transmis- » sion ou de la ligne joignant le noyau avec le soleil; à son extrémité, elle décrit presque invariablement une » courbe.

» D'après le degré de la courbe constaté le 30 et la direction de la course de la cometé, je pense que la » terre a très probablement rencontré la queue de l'astre dans la matinée de ce jour, ou bien elle se trouvait » dans une région qui avait été balayée quelques instans auparavant par la substance cométaire.

» En ce qui concerne ce sujet, je puis ajouter que dimanche au soir, alors que la comète était si apparente » dans la région nord du ciel, il se produisit une phosphorescence, ou illumination de la voûte azurée, que j'at- » tribue à une lueur boréale. Cette phosphorescence inusitée fut observée par plusieurs autres personnes, et en » songeant au peu de distance qui nous séparait ce soir-là de la comète, ce peut être un point digne d'investi- » gation, à savoir qu'un tel effet puisse être attribué à notre proximité des régions où elle se trouve.

» Si une semblable illumination du ciel a été remarquée généralement sur la surface de la terre, ce fait » serait alors très significatif. »

nel piano dell'orbita, e quindi non rivolta verso la terra: nel giorno 30 poi, avrebbe dovuto deviare dalla direzione del raggio vettore di 24° per arrivare alla terra. Certo fu piccola assai la distanza della terra alla coda, e non è stata maggiore di 0, 02 della distanza della terra al sole. Vedremo se col tempo gli elementi saranno migliori. Io ho trovato colle nostre osservazioni del 1, 4 e 7 luglio i seguenti

Pass° al periel. giugno 11, 31'75 Tm. Greenw.

$\varpi = 248^\circ \; 29' \; 11''$

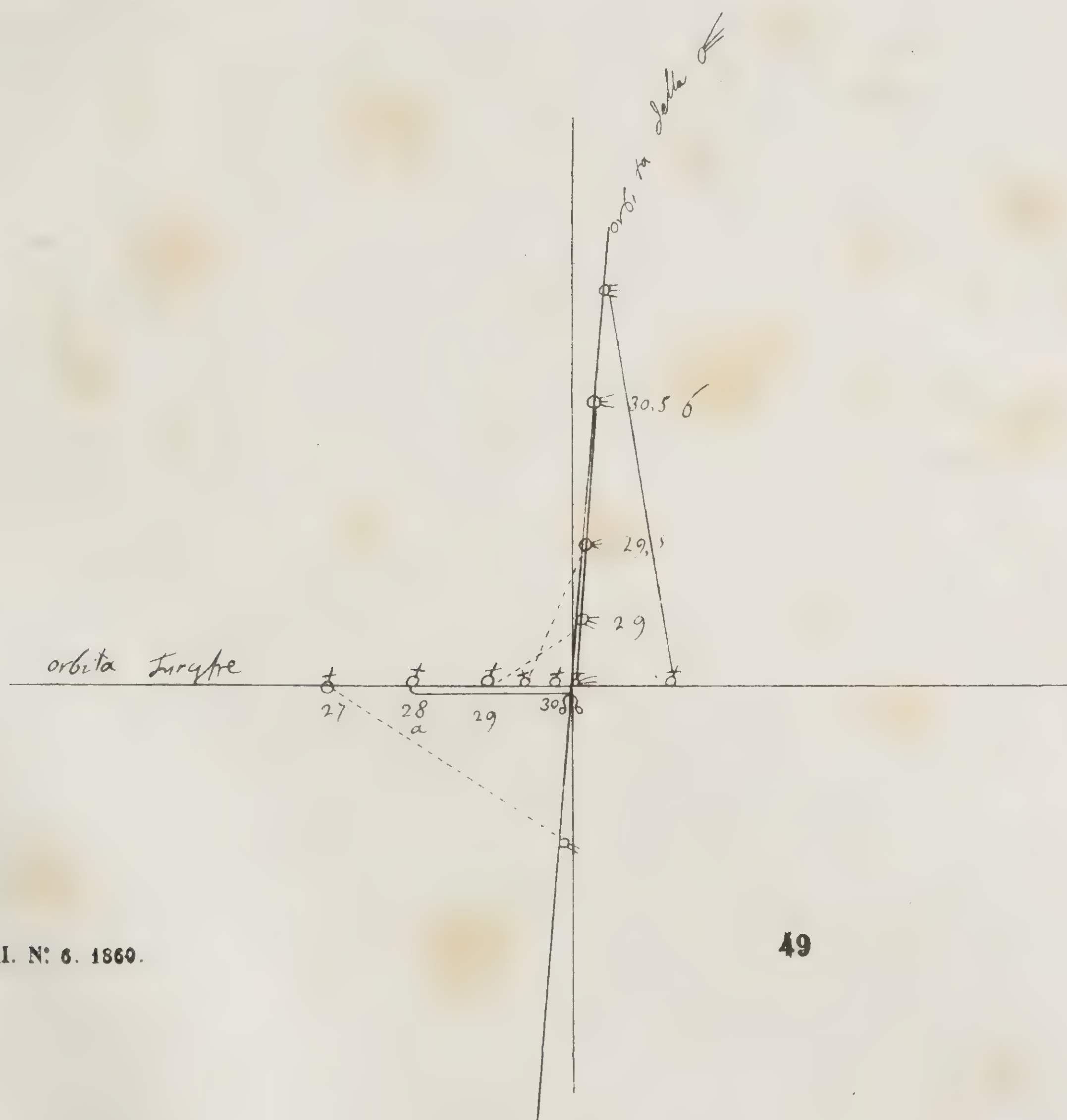
$☊ = 278 \;\; 58 \;\; 41$

$i = 85 \;\; 52 \;\; 56$

$\log.\, q = 9.91193$

M° diretto.

Il perielio è un poco incerto per la natura stessa de'termini da cui dipende, e bisogna aspettare osservazioni più distanti.



P. S. Onde vedere se per la sua curvatura la coda poteva toccare la terra, ho calcolato pel giorno 4, 4 luglio la posizione apparente di un punto del raggio vettore della cometa posto oltre il nucleo di 0, 100, e ho trovato longit. geoc. $185^\circ\ 8'$. latit. geoc. $71^\circ\ 48'$. La coda quella sera attraversò iota Dragone, onde passò vicinissima a questo punto della sfera celeste, e ne distava meno della sua larghezza. Onde avuto anche riguardo allo scorcio sotto cui si guarda la coda dalla terra, si rileva che esiste una curvatura o deviazione, ma non tanta quanta era necessario per arrivare alla terra. Avendo calcolato i diametri veri del nucleo misurati nella mattina del 1 luglio, nella sera dello stesso giorno e nella sera del 2, trovo i seguenti valori in miglia

1. luglio mattina 3^h ant. : diam. cometa 548^{miglia}
sera 9^h pom. $348^{\text{mig.}}$
2. luglio . . . . 9^h pom. 247.

Sicchè il nucleo è diminuito aumentandosi la sua distanza dal sole. La nebulosità misurata il 1 luglio mattina aveva un diametro di $3'\ 11''$ ove terminava l'inviluppo paraboloidale; prendendo questo limite per superficie di livello dell' atmosfera cometaria, si avrebbe per un limite superiore della massa, dalla regola di Calandrelli e Roche, *due milionesimi della terra*. Ma tal risultato è assai incerto, essendo impossibile precisare il limite della superficie di livello, ove l'attrazione del nucleo bilancia quella del sole, e quella che si assume può non esser la vera.

INDICE GENERALE

DI TUTTI GLI ARTICOLI

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

ERRATA CORRIGE

Pag. 319 linea 13, $\sec u \frac{e^{\log r} - \dots}{2}$
si legga $\sec u =$

» 321 linea 2 (*montando*) gravià
si legga gravità

» 324 linea 5 (*montando*) g'leichungen swischen
si legga Gleichungen zwischen

» » linea 3 Halljahr
si legga Halbjahr

» » linea 2 Dar Stellung
si legga Darstellung



ERRATA CORRIGE AL TOMO II. 1859.

Pag. 204 linea 12, invece di $2(\beta^2 - \alpha^2 \mp 2\alpha\beta\sqrt{3})^{\frac{\varepsilon}{c}}$
si legga $2(\alpha \pm \beta\sqrt{3})(\beta^2 - \alpha^2 \mp 2\alpha\beta\sqrt{3})^{\frac{\varepsilon}{c}}$

» 204 linea 15, invece di $(\alpha \pm \beta\sqrt{3})^2$
si legga $(\alpha \pm \beta\sqrt{3})^3$

» 206 linea 1, si cambino i segni degli ultimi due termini,
e si legga θ^2 invece di θ nell'ultimo termine.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
510.5AMI C001
ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA B
3 1860
3 0112 016752583